不動点をめぐる代数構造たち
Algebraic Structures for Fixpoints

木下佳樹
Yoshiki KINOSHITA yoshiki@ni.aist.go.jp
独立行政法人産業技術総合研究所, AIST.

概 要

著者らは μ 圏を定義し，非決定的な**while** プログラムの代数的意味論を与えるために用いた．一方，D. Kozen は正則表現の代数としてクリーニ代数を導入し，後にこの構造を用いて**while** プログラムの代数的意味論を与え，標準形定理などを得ている．本稿では μ 圏とクリーニ代数を比較して，どちらも他の完全な一般化になっているわけではないことを明らかにし，さらに，クリーニ圏を導入して，これが両者に共通する一般化となっていることを示す．また，クリーニ圏と Kozen による型付きクリーニ代数との関連を明らかにし，前者が後者に代って用いられるべき構造であることを，数理的な理由を挙げて主張する．

1　はじめに

while 文などの繰り返し文はプログラム変換の不動点として意味付けられるが，このとき，最小不動点と逐次演算子（sequencer，いわゆるセミコロン）とを絡みあわせて考察することが必要である．この目的のために著者らは μ 圏を定義し [6, 7]，**while** コマンドのような最小不動点と非決定性をもつ計算体系の代数的な意味論を与え，さらにこのような計算体系における精製法（refinement）の数理モデルを与えた．この意味論においては，μ 圏の対象によって状態の全体を表し，μ 圏の射が各コマンドを表す．同じ hom 集合に属する有限個の射の上限が，射の非決定的結合を表し，可算個の射の上限を用いて最小不動点を表す．これまで，ω**CPO** 上のモノイドや完備関係代数などの μ 圏より具体的な構造において同様の議論がなされたが，それらすべてに通ずる議論を抽出したのが，μ 圏を用いた理論である．ω**CPO** 上のモノイドや完備関係代数などの場合をすべて特別な場合として含むからである．

μ 圏は，局所順序圏で，各 hom 集合の任意の可算部分集合が上限を持ち，しかもその上限が射の合成によって保たれるようなものである．この構造は，二つの意味で通常の代数構造を一般化して得られる．まず第一に，μ 圏のもつ演算子の引数の数（アリティ）が，通常のように有限ではなく ω（最初の無限順序数）である．第二に，通常の代数構造は集合の上の構造だが，μ 圏は，局所順序圏の上の代数構造 [5] である．μ 圏はこれらの意味で一般化された代数構造を持つ．このことの重要な帰結は，自由代数が常に存在することである．

一方，正則表現を特徴づけるものとして，1960 年代以来，多数の公理系が提案されている [18, 4, 16, 15, 12, 2, 17, 3]．その中でも D. Kozen に

よるものは，等式ホーン節のみを用いた準代数構造（essentially algebraic structure）である点で特に興味深い．Kozen は，著者らが μ 圏を導入したのと同様の目的でクリーニ代数からさらにテスト付クリーニ代数を定義し，標準形定理などを得ている [9, 10]．

本稿の第一の目的は，似た目的に用いることのできる μ 圏とクリーニ代数を比較検討することである．一つしか対象を持たない μ 圏（このようなものを一対象 μ 圏と呼ぶ）は，すべてクリーニ代数であるが，クリーニ代数は μ 圏のもつ「多対称性」を持ち合わせない．従って，μ 圏とクリーニ代数は，どちらも他の一般化とはいえず，μ 圏とクリーニ代数は，互いに他に含まれないような場合を含むことを明らかにする．

本稿の第二の目的は，クリーニ圏とその間の準同型を導入し，この概念の基本的性質を示すことである．クリーニ圏は μ 圏およびクリーニ代数の両方の一般化になっている．詳しく言うと，μ 圏とその準同型がなす圏 μ**Cat** およびクリーニ代数とその準同型がなす圏 **KlAlg** が，共にクリーニ圏とその準同型がなす圏 **KlCat** の部分圏であることを示す．特にクリーニ代数は，ちょうど一対象クリーニ圏であり，**KlAlg** は **KlCat** の充満部分圏（full subcategory）である．さらに，クリーニ圏と Kozen による型付きクリーニ代数とを比較し，前者が後者に代わる簡明かつ豊かな構造であることを数理的な理由を挙げて主張する．

これらの結果は [19] で新しく発表したもので，本稿はその誤りを訂正した上で増補改訂した最終稿である．

本稿は以下のように構成する．まず，第 2 節で μ 圏とクリーニ代数の定義を再掲する．第 3 節が本稿の結果で，μ 圏とクリーニ代数を比較して，両者が互いに他の一般化ではないことを示し，両方の一般化となるクリーニ圏を定義し，1 なし型付きクリーニ代数に代わって用いるべきことを主張する．

2　μ 圏とクリーニ代数

2.1　μ圏

本稿で μ 圏と呼ぶものは [6] で lfp 代数と呼んだものにほぼ等しく，また，後に [7] で単に μ 代数と呼んだものと同じである．

定義 2.1 (局所順序圏，局所順序函手) 局所順序圏（*locally ordered category*）とは各 hom 集合に半順序が与えられており，しかも，それらの順序が射の合成によって保たれる，つまり $f \leq g$，$f' \leq g'$ で f と f' が合成可能であれば $f \circ f' \leq g \circ g'$ となるような圏である．局所順序圏 C から局所順序圏 D への局所順序函手とは C から D への函手 F で各 hom 集合の順序を保つもの，つまり $f \leq g \Longrightarrow F(f) \leq F(g)$ を満たすものである．

定義 2.2 (μ 圏) μ 圏とは，局所順序圏 C，C の対象の二つ組 (a, b) に対して hom 集合 $C(a, b)$ の可算列の上限演算子 $\bigvee_{ab}\colon C(a, b)^\omega \to C(a, b)$ を与える $\bigvee$，および $C(a, b)$ の最小元 $\perp_{ab}$ を与える $\perp$ の三つ組 $(C, \bigvee, \perp)$ で，上限および最小限が射の合成に関して分配されるようなもの，つまり $\bigvee_{bc}(r_0, r_1, \ldots) \circ \bigvee_{ab}(q_0, q_1, \ldots) = \bigvee_{ac}(r_0 \circ q_0, r_0 \circ q_1, \ldots, r_1 \circ q_0, r_1 \circ q_1, \ldots)$ および $\perp_{bc} \circ \perp_{ab} = \perp_{ac}$ が成り立つようなものである．

μ 圏の間の準同型も，通常のように定義され，こうしてできる圏を μ**Cat** と書く．**LocOrd** を局所順序圏と局所順序函手によって作られる圏とするとき，μ 圏は，[5, 6] における意味での代数構造として記述することができる [7]．したがって，μ**Cat** から **LocOrd** への忘却函手は左随伴を持つ．この

意味で，自由 μ 圏が存在する．μ**Cat** は **LocOrd** が Gray テンソル積 [5] に関してつくる両側閉単圏によって豊饒化（enrich）されるが，豊饒化に関する考察は本稿の目的には必要ない．

Manes[13] による部分加圏（partially additive categories）は μ 圏に似ているが，両者には次のような相違がある．

1. μ 圏の $\bigvee$ は全域的に定義されなければならないが，対応する部分加圏の $\sum$ は部分的にしか定義されなくてよい．
2. 一方，部分加圏には余積（coproduct）の存在とそれに関するいくつかの性質が要請されるが，μ 圏にはそのような要請はない．

以上から μ 圏も部分加圏も互いに他に含まれはしない．部分加圏の余積は，プログラムの条件分岐のモデル化のために必要なものであるが，余積を持つ μ 圏を考えることによって，同様のことができる．したがって，μ 圏と部分加圏の主な相違は，1. にある．部分加圏の定義では ω 個の引数を持つ $\sum$ の結合律の記述が繁雑にならざるを得ないが，順序構造に着目した μ 圏の定義は，より簡単である，という相違もあるが，これは本質的なものではない．

定義 2.3 (閉半環 [1, 14]) 冪等半環（*idempotent semiring*）$(A, 0, 1, +, \cdot)$ にアリティ ω の演算子 $\sum$: $A^\omega \to A$ が定義され，$a \leq b \stackrel{\text{def}}{=} a + b = b$ によって定義される半順序 $\leq$ に関して，$\sum(a_0, a_1 \ldots)$ が $\{ a_i \mid i \in \omega \}$ の上限になっていて，$\cdot$ に関する $\sum$ の分配法則が成り立ち，しかも有限個の和については $+$ と一致するものを閉半環という．

閉半環とその準同型が作る圏を **CSRing** と書く．

命題 2.4 ただ一つの対象を持つ μ 圏は閉半環に他ならない．

2.2 クリーニ代数

正則表現を特徴づけるものとして，1960 年代以来，多数の公理系が提案されている [18, 4, 16, 15, 12, 2, 17, 3]．そのなかでも D. Kozen[9] によって導入されたクリーニ代数は，等式ホーン節によって定義された構造で，取り扱いやすいので，以下本稿では「クリーニ代数」を Kozen の意味で用いる．

定義 2.5 (クリーニ代数) クリーニ代数とは集合 X とそのうえの二項演算 $+$, $\cdot$，単項演算 *，および X の元 0，1 の六つ組 $(K, 0, 1, ^ast, +, \cdot)$ で，$(X, 0, 1, +, \cdot)$ が冪等半環であり，しかも次の四つが成り立つようなものである：$1 + a \cdot a^* = a^*$, $1 + a^* \cdot a = a^*$, $b + (a \cdot x) \leq x \Longrightarrow (a^* \cdot b) \leq x$, $b + (x \cdot a) \leq x \Longrightarrow (b \cdot a^*) \leq x$. ただし $x \leq y$ は $x + y = y$ の略記である．

クリーニ代数の間の準同型を通常のように定義し，クリーニ代数と準同型が作る圏を **KlAlg** と書く．

クリーニ代数の基本的な例は，単（単位元を持つ半群，monoid）の台集合の冪によって作られるものである．

例 2.6 (単の冪) $\mathbf{M} = (M, e, \star)$ を e を単位元，$\star$ を二項演算とする単とするとき，$(\mathcal{P}(M), \cup, \cdot, ^*, \emptyset, \{ e \})$ はクリーニ代数である．ただし $\mathcal{P}(M)$ は M の冪集合，$\cup$ は $\mathcal{P}(M)$ の元の間の合併集合をとる演算，$\cdot$ は要素毎の $\star$ として $L \cdot L' \stackrel{\text{def}}{=} \{ m \star m' \mid m \in L, m' \in L' \}$ によって定められる演算，* は $L^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n \in \omega} L^n$（ただし L^n は L の $\cdot$ に関する冪）によって定義される演算とする．

例 2.7 (言語の全体) 例 *2.6* において，$\mathbf{M}$ が集合 X によって自由生成される単 $\mathbf{F}(X) = (F(X), e, \star)$ である場合を考えて，$\mathbf{Lang}(X) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{P}(F(X)), \cup, \cdot, ^*, \emptyset, \{ e \})$ とする．これはアルファベット X 上の言語の全体が作るクリーニ代数である．

例 2.8 (正則言語) X 上の正則言語の全体がつくる集合 $Reg(X)$ は，合併集合，連接，クリーニ-$*$，0，1 に関して閉じているので，$\mathbf{Lang}(X)$ の部分クリーニ代数 $\mathbf{Reg}(X)$ を作る．

例 2.9 閉半環は $x^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\in\omega} x^n$ と定めることによって，常にクリーニ代数となる．

したがって閉半環がつくる圏 **CSRing** は **KlAlg** の部分圏である．Kozen[8] は，閉半環でないようなクリーニ圏の例を与えて，次の命題を示した．

命題 2.10 **CSRing** は **KlAlg** の真の部分圏である．

クリーニ代数を定義している条件は，[5, 6] の意味での代数構造ではない．公理が等式だけでなく，等式ホーン節（equational Horn clause）を含むからである．クリーニ代数を定義する等式だけによる公理化が存在するかどうかは知られていない．しかし，等式ホーン節によって定められる構造は準代数構造（essentially algebraic structure）と呼ばれており，次の意味で自由代数の存在することが知られている．

定理 2.11 (自由クリーニ代数) 与えられた集合 X に対し，クリーニ代数 $\mathbf{K}(X)$ と X から $\mathbf{K}(X)$ の台集合 $K(X)$ への写像 $\eta_X\colon X \to K(X)$ で次の条件を満たすものが存在する．任意のクリーニ代数 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}$ の台集合 A への X からの任意の写像 $f\colon X \to A$ に対して，$\mathbf{K}(X)$ から $\mathbf{A}$ へのクリーニ代数準同型 $\hat{f}\colon \mathbf{K}(X) \to \mathbf{A}$ で $f = \hat{f} \circ \eta_X$ を満たすものが唯一つ存在する．いいかえると f は $\mathbf{K}(X)$ の上の準同型に一意的に拡張される．

さらに Kozen[9] は本質的に次の結果を示した．

定理 2.12 例 *2.8* に示したアルファベット A 上の正則言語の全体が作るクリーニ代数 $\mathbf{Reg}(X)$ は，各 $x \in X$ を，x のみからなる言語 $\{ x \} \in \mathbf{Reg}(X)$ に写す写像 $s_X\colon X \to Reg(X)$ とともに X によって生成される自由クリーニ代数を構成する．

Kozen が与えたのは，次の形である．

系 2.13 (完全性定理（Kozen）) 同じ正則集合を表示する二つの正則表現 α，β が与えられたとき，$\alpha = \beta$ はクリーニ代数の定理である．

3 クリーニ圏

命題 2.4 を用いて命題 2.10 を言いかえると，クリーニ代数は一対象 μ 圏を一般化したものである．しかしこの対応では，クリーニ代数は複数の対象を持つ μ 圏には対応しないから，任意の μ 圏がクリーニ代数によって一般化されているわけではない．μ 圏とクリーニ代数は，閉半環の異なる方向への一般化といえる．μ 圏は代数構造であるが，可算無限のアリティを持つオペレータを持つ．クリーニ代数は，有限のアリティの演算子だけを持っているが，代数構造ではなく準代数構造としての公理化である．本節では，μ 圏とクリーニ圏を両方とも特別の場合として持つ構造として，クリーニ圏を導入する．

定義 3.1 (クリーニ圏) クリーニ圏とは圏 C，C の対象 a，b に対して $C(a,b)$ の定数 $0_{ab} \in C(a,b)$ を与える 0，C の対象の対 a，b に対して $C(a,b)$ の二項演算 $+_{ab}$: $C(a,b) \times C(a,b) \to C(a,b)$ を与える $+$，C の対象 a に対して $C(a,a)$ 上の単項演算 ^{*_a}: $C(a,a) \to C(a,a)$ を与える * の四つ組 $(C, 0, {}^*, +)$ で，以下を満たすものである．

- 各 hom 集合 $C(a,b)$ が 0_{ab} を単位元，$+_{ab}$ を二項演算とする半束（*semilattice*）である．
- hom 集合の半束構造が射の合成によって保たれる．
- 任意の対象 a，b，a 上の自己射 $q \in C(a,a)$ および a から b への射 $r, x \in C(a,b)$ に対して $\mathrm{id}_a + q \circ q^* = q^*$, $\mathrm{id}_a + q^* \circ q = q^*$, $r + (q \circ x) \leq x \Longrightarrow (q^* \circ r) \leq x$, $r + (x \circ q) \leq x \Longrightarrow (r \circ q^*) \leq x$ が成り立つ．

この定義は，[19] での局所順序圏の上の構造としてのクリーニ圏の定義と同等であり，そこでの各 hom 集合上の半順序は，上の定義での半束から $x \leq y \iff x + y = y$ によって導かれる半順序 $\leq$ に一致する．

例 3.2 (クリーニ代数上の行列) クリーニ代数 $\mathbf{K} = (K, 0, 1, {}^*, +, \cdot)$ の上の行列がなす圏 $\mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}$ を次のように定める：$\mathrm{ob}(\mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, n \in \omega \mid n > 0 \,\}$，つまり対象は正の自然数；$Hom$ 集合 $\mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(m,n)$ は，$\mathbf{K}$ の元を要素とする n 行 m 列の行列の全体；射の合成は行列の積；恒等射は単位行列．さらに，次のように 0，*，$+$ を定めることによって $(\mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}, 0, {}^*, +)$ はクリーニ圏となる．0 は零行列．$+$ は要素毎の和によって定まる行列の和．$M \in \mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(n,n)$ に対して，$M^* \in \mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(n,n)$ を n に関して帰納的に定める．$n = 1$ のとき $\mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(1,1) \cong \mathbf{K}$ だから M^* は $\mathbf{K}$ における M^*．$n > 1$ のとき，$M \in \mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(n,n)$ を

$$M = \begin{pmatrix} L & c \\ r & k \end{pmatrix}$$

と $L \in \mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(n-1, n-1)$，$c \in \mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(n-1, 1)$，$r \in \mathrm{Matr}_{\mathbf{K}}(1, n-1)$，$k \in \mathbf{K}$ に分解して，

$$M^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} f^* & f^*ck^* \\ k^*rf^* & k^* + k^*rf^*ck^* \end{pmatrix}$$

と定める．ただし $f \stackrel{\mathrm{def}}{=} L + ck^*r$．

形式的に定義されただけに見える例 3.2 がうまく働く理由を，クリーニ代数上の加単（[12] などで論じられている半環上の加単の特別な場合にあたる）がつくる線型代数によって説明することができるが，その詳細な展開は別稿にゆずる．とくに M^* の定義が恣意的に見えるが，本質的には正則表現が表わす言語を受理する有限状態機械の構成にすぎず，[4, 3, 9] などに既に現われて知られている．

例 3.3 (圏の冪) C を圏とし，そこでの射の合成を $\circ$，恒等射を id とかく．このとき $(P(C), 0, {}^*, +)$ を次のように定めるとクリーニ圏を得る．$\mathrm{ob}(P(C)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ob}(C)$，$P(C)(a,b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(C(a,b))$（$C(a,b)$ の冪集合,）$L \in P(C)(b,c)$ と $L' \in P(C)(a,b)$ に対して $L \circ L' \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, f \circ g \mid f \in L, g \in L' \,\}$，$\mathrm{id}_a^{P(C)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, \mathrm{id}_a^C \,\}$，$L + L' \stackrel{\mathrm{def}}{=} L \cup L'$，$0_{ab} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \emptyset$，$L \in P(C)(a,a)$ に対して $L^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{n \in \omega} L^n$（$L^n$ は $\circ$ に関する n 乗.）特に C が唯一つの対象しか持たない場合には，圏 C は単となり，例 *2.6* に帰着する．

μ 圏は，$q + r \stackrel{\text{def}}{=} \vee(q, r, r, r, \ldots)$，$q^* \stackrel{\text{def}}{=} \vee(\mathrm{id}, q, q \circ q, q \circ q \circ q, \ldots)$ と置くことによりクリーニ圏となる．また，簡単にわかるように，一対象クリーニ圏はちょうどクリーニ代数である．つまり，クリーニ圏は，μ 圏およびクリーニ代数の両方を特別な場合として含む．クリーニ圏とその準同型がなす圏を **KlCat** と書くと，μ**Cat** は **KlCat** の部分圏であり，**KlAlg** は **KlCat** の充満部分圏である，ということができる．

3.1 プログラム意味論への応用

クリーニ代数は（したがって一対象 μ 圏も）繰り返し文を持つプログラムの意味領域として用いることができる．複数の対象を持つ μ 圏は，この目的のために役立つであろうか．プログラムの意味領域として用いられるとき，μ 圏の対象は,「状態集合」（の一般化）とされ，射は実行文などによる「状態遷移」とされる．従って，一つの状態集合の状態から別の状態集合に属する状態へ移るような遷移があれば，複数の対象を持つことが重要になる．そのような遷移があるだろうか?

変数宣言は，複数の状態集合をまたがる遷移の典型的な例である．たとえば，自然数型の変数 x だけがあるようなコンテキストにおける，文字型の変数宣言 `var c: char` は，それ自身，$N \to N \times C$（N は自然数全体の表示，C は文字全体の表示）という状態遷移だとみなすことができる．このように，複数の状態集合を考えると，実行文だけではなく，宣言文も状態遷移とみなしてプログラムの意味を定義することができる．

したがって，クリーニ代数の多対象版というべきクリーニ圏を導入することによって，変数宣言を遷移としてモデル化することができる．つまり，クリーニ圏は μ 圏とクリーニ代数の両方の一般化であるばかりでなく，プログラムの意味論に有益な応用を持つと期待されるのである．

3.2 １なし型付クリーニ代数との比較

さて，D. Kozen[11] は「非正方行列」を考察するために「型付クリーニ代数」および「１なし型付クリーニ代数」を導入した．

クリーニ圏は常に１なし型付クリーニ代数をなす．以下では，[11] の主定理を直接導いた補題を，次の形で証明して，クリーニ圏が型付きクリーニ代数に換わって用いられるべきものであるという主張の数理的根拠とする．

補題 3.4 任意のクリーニ圏 $\mathbf{K}$ をクリーニ代数に埋め込むことができる．

詳しくいうと，任意のクリーニ圏 $\mathbf{K}$ に対して，クリーニ代数 $\mathbf{G}(\mathbf{K})$ と $\mathbf{K}$ から $\mathbf{G}(\mathbf{K})$（を一対象クリーニ圏とみたもの）への忠実な（faithful）クリーニ圏準同型 $J\colon \mathbf{K} \to \mathbf{G}(\mathbf{K})$ が存在する．これを証明するために，次の構成を与える．

構成 3.5 $\mathbf{C} = (C, 0, {}^*, +)$ をクリーニ圏とするとき，次のようにしてクリーニ代数 $(Sub(C), \emptyset, \mathrm{id}, {}^\star, \cup, \cdot)$ を構成することができる．このクリーニ代数を $\mathbf{G}(\mathbf{C})$ とかく．

- $Sub(C)$ はグラフとしてみた C の部分グラフの全体．
- $\cup$ はグラフの合併，つまり節の集合，矢の集合それぞれについて合併集合をとる演算.
- $G \cdot G'$ の節集合は G の節集合と G' 節集合の合併．矢の集合は $\{\, f \circ f' \mid f \in Arrow(G), f' \in Arrow(G'), source(f) = target(f') \,\}$ によって定義される．ただし $\circ$ は C における射の合成.

- id は C の対象をすべて節とし，矢の全体は C の恒等射の全体となるようなグラフ．
- $\emptyset$ は空グラフ．
- $G^\star \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{n\in\omega} G^n$，ただし G^n は $\cdot$ に関する冪．

$\mathbf{G}(\mathbf{C})$ はクリーニ代数だから，一対象のクリーニ圏と見なすことができる．$\mathbf{C}$ の射 $f\colon a \to b$ を，節を a，b のみとし，矢は f のみとするグラフに写すことにより $\mathbf{C}$ から $\mathbf{G}(\mathbf{C})$ への函手 $J\colon \mathbf{C} \to \mathbf{G}(\mathbf{C})$ が定まる．この函手は忠実であり，しかもクリーニ圏の構造を保つ．従って補題 3.4 が成り立つ．

型付クリーニ代数に関連して導入される「型」は，型理論における型とは似て非なるものである．型の全体は（単純型の）集合 Ω の自乗 Ω^2 にすぎず，型の演算子がない．Kozen は $\alpha\colon s \to t$ の形の判定（judgement）を用いているが，$\to$ は型の演算子ではなく，$s \to t$ は s も t も単純型である場合しか考えないのである．

以上のような理由で，型付クリーニ代数，1なし型付クリーニ代数などの概念は，他の理論との関連がつけにくく，不自然な概念である．補題 3.4 におけるように，1なし型付クリーニ代数に代えてクリーニ圏の概念を用いるべきだというのが著者の主張である．

参考文献

[1] Aho, A., Hopcroft, J., and Ullman, J.: *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, 1975.

[2] Arkhangelskii, K. B. and Gorshkov, P. V.: Implicational axioms for the algebra of regular languages (in Russian), *Doklady Akad. Nauk, USSR, ser A.*, Vol. 10(1987), pp. 67–69.

[3] Bloom, S. L. and Ésik, Z.: *Iteration Theories*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, 1991.

[4] Conway, J. C.: *Regular Algebra and Finite Machines*, Chapman and Hall, 1971.

[5] Kinoshita, Y. and Power, J.: Lax naturality through enrichment, *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 112,No. 1(1996), pp. 53–72. MR 98f:18010.

[6] Kinoshita, Y. and Power, J.: A general completeness result in refinement, *Recent Trends in Algebraic Development Techniques*(Bert, D., Choppy, C., and Mosses, P.(eds.)), Springer Lecture Notes in Computer Science, No. 1827, 2000, pp. 201–218.

[7] Kinoshita, Y. and Watanabe, H.: A functorial approach to refinement, *Proceedings of the Workshop on Refinement and Abstraction*, ETL technical report 2001–3, 2001, pp. 49–63.

[8] Kozen, D.: On Kleene algebras and closed semirings, *Proceedings of Mathematical Foundations of Computer Science*(Rovan(ed.)), Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 452, 1990, pp. 26–47.

[9] Kozen, D.: A Completeness Theorem for Kleene Algebras and the Algebra of Regular Events, *Information and Computation*, Vol. 110(1994), pp. 366–390.

[10] Kozen, D.: Kleene Algebra with Tests, *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, Vol. 19,No. 3(1997), pp. 427–443.

[11] Kozen, D.: Typed Kleene algebra, Technical Report 98–1669, Computer Science Department, Cornell University, March 1998.

[12] Kuich, W. and Salomaa, A.: *Semirings, Automata and Languages*, 1986.

[13] Manes, E. G.: *Predicate Transformer Semantics*, Cambridge University Press, 1992.

[14] Mehlhorn, K.: *Data Structures and Algorithms 2: Graph Algorithms and NP-Completeness*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, 1984.

[15] Morisaki, M. and Sakai, K.: A Complete Axiom System for Rational Sets with Multiplicity, *Journal of Theoretical Computer Science*, Vol. 11(1980), pp. 79–92.

[16] Ng, K. C. and Tarski, A.: Relation algebras with transitive closure, *Notices Amer. Math. Soc.*, Vol. 24(1977), pp. A29–A30.

[17] Pratt, V.: Dynamic algebras as a well-behaved fragment of relation algebras, *Universal Algebra in Computer Science*, Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 425, Springer-Verlag, 1990, pp. 74–110.

[18] Salomaa, A.: Two complete axiom systems for the algebra of regular events, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 13(1966), pp. 158–169.

[19] 木下佳樹: 不動点をめぐる代数構造たち, **日本ソフトウェア科学会第 *18* 回大会（*2001* 年度）論文集**.