技術者／プログラマのためのモナドと圏論 第2回

技術者／プログラマのための
モナドと圏論
第2回

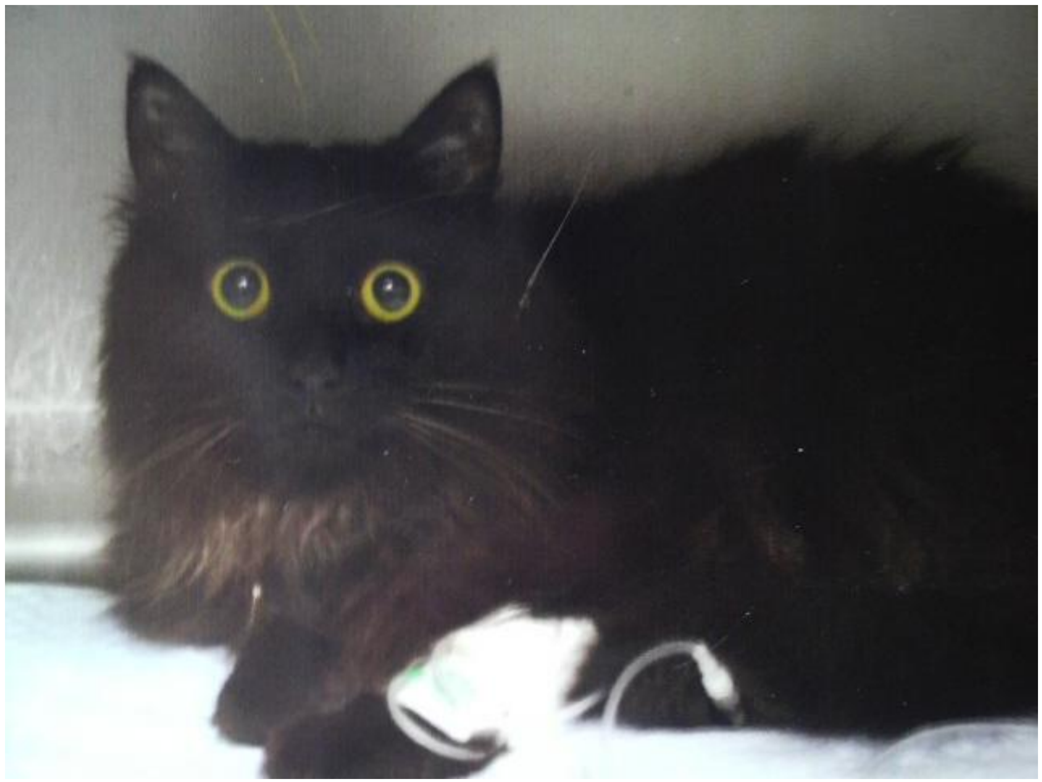
檜山 正幸 (HIYAMA Masayuki)

2009年5月21日 (木曜)18:00開始

目次

モニャドはどうしたんニャ？

とりあえず圏論をやらんとニャ



って、3回で終わるんかニャ？

無理だわ

- 4回にします。
- あまり長くはしたくないのだけど…

今日の予定（おおよそ）

1. まえおき／まえせつ -- 10分
2. ちょっとだけ復習 -- 15分 (25分)
3. Nを素材に -- 50分 (75分)
4. 休憩 -- 25分 (100分)
5. ツリーと生け垣を素材に- - 30分 (130分)
6. 平面タングルを素材に -- 50分 (180分)

状況により、この予定は（**ときに大幅に**）変更されるかも知れません。

全体(3回)の目標

- 圏論の観点からモナドを理解する(お茶を濁したり、ショートカットしない)。
- モナドを素材に圏論を学ぶ。

(以下、前回と多少変更あり)

1. 圏の基本概念:対象/射/関手/自然変換を学ぶ。
2. 圏の実例を(なるべく)たくさん知る。
3. モナドの実例を(なるべく)たくさん知る。
4. モナドのクライスリ圏の作り方を知る。

今日の目標

（これは前回の目標のサブセットじゃん）

1. 圏の形式的な定義と直感的なイメージの両方を知る。
2. いろいろなお絵描きを実習する。
3. 圏の実例を手でいじり倒して、体になじませる。

本日のテーマ:

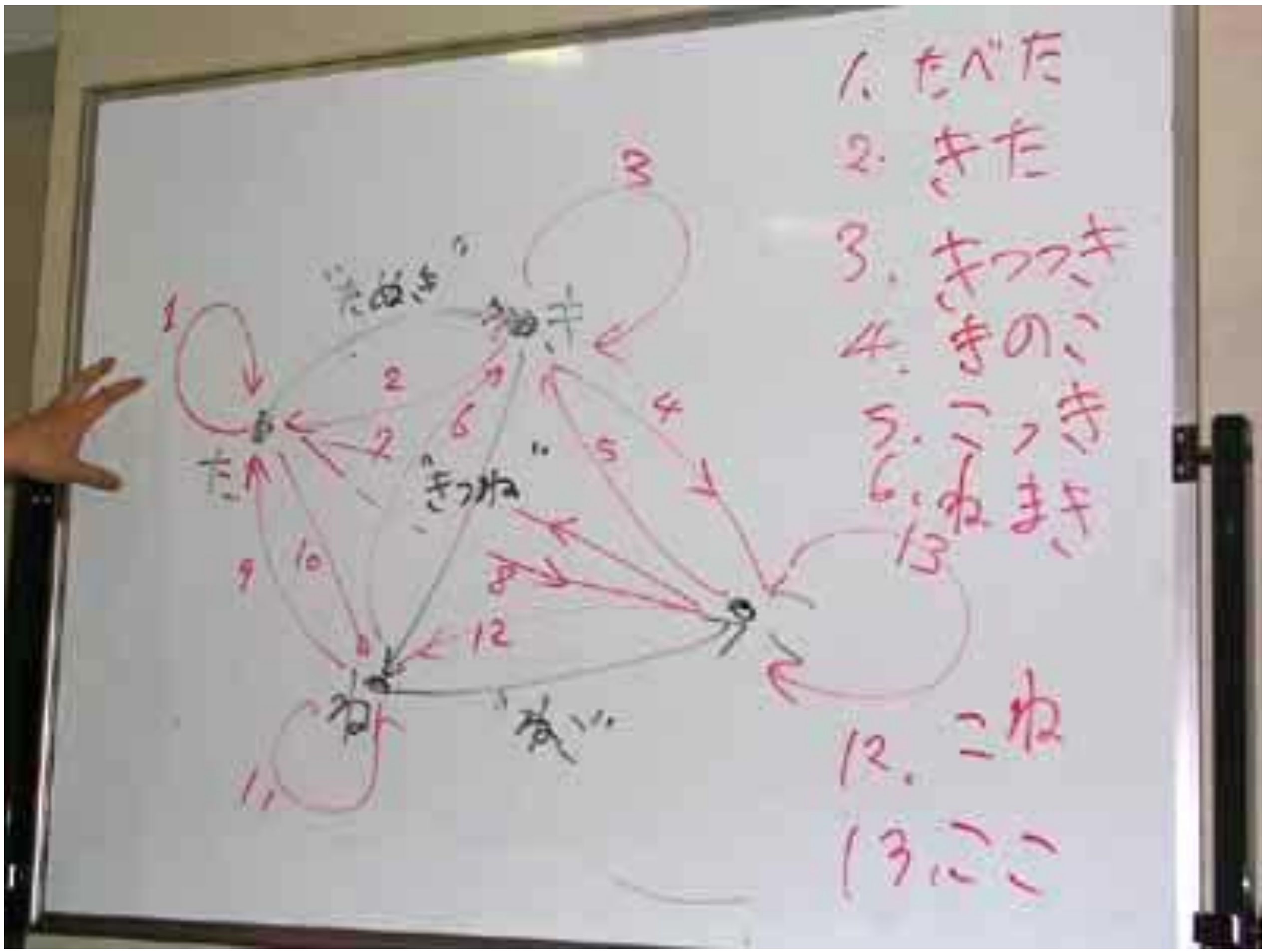
圏は友達だ。遊ぼう、遊ぼう、遊ぼう。

あ、それと

思いこみは（なるべく）なくそう。

- 「圏の〇〇は、××であるはず／△△でなくてはならない」なんて思いこみが随分と多いようだ。
- 圏の定義（公理）から導ける主張ならもちろん正しいが、そうじゃないことを勝手に仮定しない。
- 集合圏の記法・用語を、圏一般に対してそのまま使うので混乱しがちなんだけどね。

復習:しりとりの圏



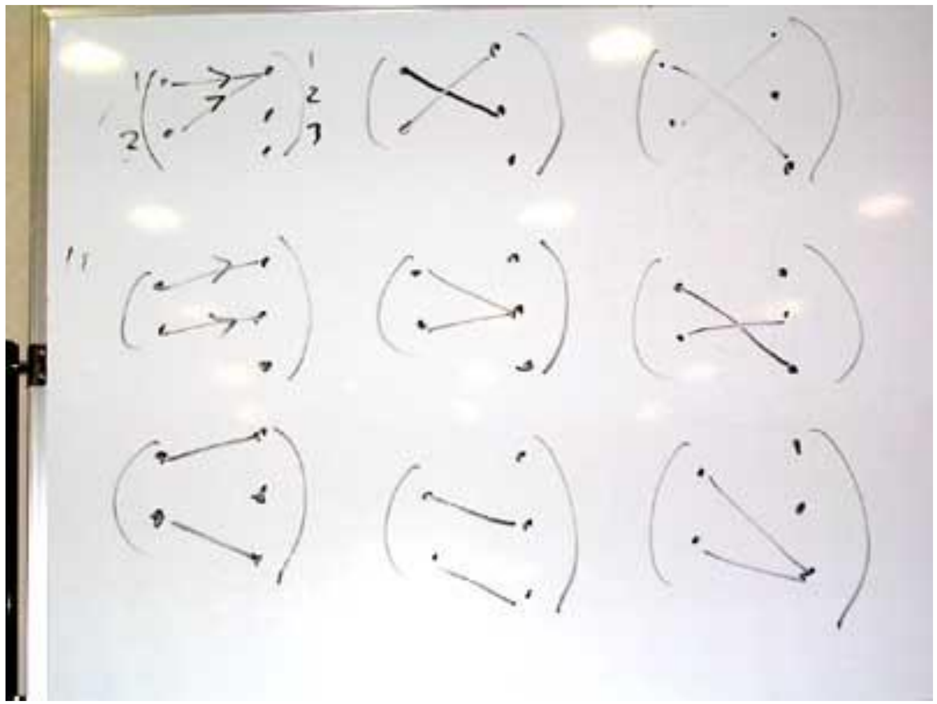
復習:しりとりの圏

- はじめての圏論 その第1歩：しりとりの圏 http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/20060821/1156120185
- 完全実装付きでもう一度お送りします、しりとりの圏

  http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/20090424/1240552575

※ デモは…… やーめた。自分でやってみてね。

復習:有限オーディナルのあいだの写像の圏



- 有限集合と写像の圏もJavaScriptで書いてみた、遊んでみてね
  http://d.hatena.ne.jp/m-hiyama/20090425/1240640213

復習：圏の構成要素

※ ここで使っている記法は、普通の集合と写像の意味

- 対象の集合：O（大文字オー）
- 射の集合：M
- 域：dom : M→O
- 余域：cod : M→O
- 恒等： id : O→M
- 結合： ; : M×M⊃→M

f;g の結合可能性： dom(f) = cod(g)

復習：圏の法則

1. dom(id(a)) = a
2. cod(id(a)) = a

1. id(dom(f));f = f
2. f;id(cod(f)) = f
3. (f;g);h = f;(g;h)

子供の圏論

- 小学校、中学校、高校でもやれる圏論の素材はいくらでもある
- 大人になってイキナリやるから面食らうのか？
- 「集合の圏」とか「位相空間の圏」とか言われると、、、（紙やコンピュータのなかに収まらない）
- 「小中学校でも圏論を」とは言わないが
- 今日は子供に戻ってみよう
- 大人的先入観をできるだけ排除しよう

※ 大人になると、いろんな学習阻害ホルモンが体にまわっているみたい。

自然数だけで作る圏達

これから紹介するいくつかの圏は、

1. 対象は自然数
2. 射は自然数、または自然数のペア（2項タプル）

言い換えると、

1. 自然数の集合 = N = {0, 1, 2, 3, ... }
2. 自然数のペアの集合 = N × N = {(0, 0), (0, 1), (1, 0), ... }
3. (圏の対象の集合)⊆N
4. (圏の射の集合)⊆N、または (圏の射の集合)⊆N × N

全部、簡単なプログラミングで実装できるよ、軽い圏だからね。

一覧表

※ $N_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

特徴／お題	略号	対象の集合	射の集合
Discrete	DN	N	N
Addition	AN	{0}	N
Multiplication	MN	{0}	N
Order	ON	N	N×Nの部分
Codiscrete	CDN	N	N×N
Modified Addition	MAN	{0}	N_+
Multiplicative Transition	MTN	N	N×N_+
Multiplicative Order	MON	N	N×Nの部分

Discrete

※ 関連のところは聞き流してもいい、教科書に載っているから。

- 名前 ： DN
- 対象 : N
- 射 : N
- dom ： dom(n) = n
- cod ： cod(n) = n
- id ： id(n) = n
- ; ： n;n = n

※ idって記号がまた混乱を招くか？

関連 : ホムセット、部分圏

Addition

- 名前：AN
- 対象: {0}
- 射: N
- dom：dom(n) = 0
- cod：cod(n) = 0
- id：id(0) = 0
- ;：n;m = n + m

関連: 部分圏（世界のナベアツ風）、同型射

Multiplication

- 名前：MN
- 対象: {0}
- 射: N
- dom：dom(n) = 0
- cod：cod(n) = 0
- id：id(0) = 1
- ;：n;m = n * m

関連:モノ、エピ、同型（アイソ）

Order

- 名前：ON
- 対象: N
- 射:{[n, m] | n≦m }
- dom：dom([n, m]) = n
- cod：cod([n, m]) = m
- id：id(n) = [n, n]
- ;：[n, m];[m, k] = [n, k]

関連:始対象／終対象、スパン、直積の雰囲気、充満な（充満でない）部分圏

Codiscrete

- 名前：CDN
- 対象: N
- 射:{[n, m] | 無条件 }
- dom：dom([n, m]) = n
- cod：cod([n, m]) = m
- id：id(n) = [n, n]
- ;：[n, m];[m, k] = [n, k]

関連:同型関係、骨格的圏

Modified Addition

- 名前： MAN
- 対象: {0}
- 射: N_+
- dom： dom(n) = 0
- cod： cod(n) = 0
- id： id(0) = 1
- ;： n;m = n + m - 1

関連:関手

Multiplicative Transition

- 名前：MTN
- 対象: N
- 射:{[n, x] | x≧1 }
- dom：dom([n, x]) = n
- cod：cod([n, x]) = n*x
- id：id(n) = [n, 1]
- ;：[n, x];[m, y] = [n, x*y]

関連:可達性、証明可能性、反対圏

Multiplicative Order

- 名前 :MON
- 対象: N
- 射:{[n, m] | mはnで割り切れる}
- dom： dom([n, m]) = n
- cod： cod([n, m]) = m
- id： id(n) = [n, n]
- ;： [n, m];[m, k] = [n, k]

関連:始対象／終対象、直積／直和、全体と同型な部分圏

※ 形容詞「同型」が、射、対象、圏に対して使われているよ

ブレーク

- 一休みとか
- 質疑応答とか

- 席次表
- 懇親会の確認
- 電話：03-3981-8820

穴あき木

- 木構造は知っているよね
- ルート（根）ノードとリーフ（葉）ノード、知っている？
- ここでは、子ノードには順序（長男、次男とか）があるとする
- ルート＝リーフってこともあるよ
- ここでは、空（empty）の木は認めない

穴あきとは:

- リーフのうちのいくつか（0個も含めて好きなだけ）を白
- その他のノードは黒
- 白ノードを穴だと思う

穴あき木を描いてみよう。

穴あき木の接ぎ木

S, Tが穴あき木で、Tに穴が1個以上あるとき、

- Tの穴を1つだけ特定する
- 穴である白ノードに、Sのルートノードをぴったり重ねる
- 1本の新しい木ができた

穴に番号kが付いているとして、とりあえず 新しい木を $S;_k T$とでも書く。

単一穴あき木のモノイド

まずは、穴がちょうど1つある木だけを考える。穴の番号は常に1だから、$S;_k T$を $S;T$ と書くと:

1. $(S;T);U = S;(T;U)$
2. $I;S = S;I = S$ となるIがある

Iってどんな木？

※ モノイドってのは単一対象（one-object）の圏

穴あき生け垣の圏

生け垣（hedge）とは、木を並べたリスト（順序ありコレクション）。空リストも認める。これで圏を作る。

1. 対象は自然数 0, 1, 2, ...
2. 射は穴あき生け垣 S, T, U, ...（木と同じような記号でいいや、メンドだから）
3. dom(S) = 穴の総数
4. cod(S) = 木の本数 = リストの長さ
5. 恒等は考えてみてね
6. S;T は、Tのすべての穴に、Sの木を順に接ぎ木したもの

リストを並べる（連接する）演算もあって、これは圏論のモノイド積（monoidal product）というもの。
穴あき生け垣は単なる圏ではなくてモノイド圏（monoidal category）。

お絵描きの工夫

1. 生け垣を箱詰めする（ホワイトボックス）
2. 木の辺（エッジ）とは別に、箱からワイヤーを出す
3. ワイヤーの本数が一致したとき、箱をくっつける（結合）
4. 結合のとき、内部で接ぎ木して、ワイヤー上の白ノードを消す
5. ボックス・ワイヤー図になったし、モノイド積も含めて積み木風に操作できる
6. 穴（白いノード）は、箱とワイヤーがあれば実はいらない

箱内の黒ノードの個数が結合やモノイド積でどうなるでしょう？

穴あき生け垣の圏の制限とか拡張とか

穴あき生け垣の圏をHH（Hedge with Holes）とする。

1. HH(1, 1) は何？
2. HH(0, 1) は何？
3. HH(1, 1)のなかで竹（bamboo）だけを考えると、どんな感じ？
4. 恒等射id(n)だけ取り出してみると、これ何？
5. モノイド積を一緒に考えると、それ何？
6. 竹からできた生け垣だけでモノイド圏を作ると、どう？（次ページで扱う）
7. 穴に白以外の色（例：赤と青）も許して、ルートも色付きにしたら、どう？
8. 分岐ノードだけじゃなくて合流・分岐ノードも許したら、どんなもん？
9. ループも許しちゃったら、、、

ベクトルの足し算と文字列の連接

- 高校で習った(?)ベクトルの足し算で (1, 2) + (3, 1) は？
- 高校で習った(?)ベクトルの足し算で (1, 2) + (3, 1, 5) は？
- (1, 2) + (3, 1, 5) = (1, 2, 3, 1, 5) じゃダメなの？
- "Hello" + "World" = "HelloWorld" はイイの？
- 「1つ穴あき竹」からなる生け垣では、足し算と連接を最初からちゃんと備えてる
- 色付き穴あき竹の生け垣からは、どんな計算が生まれる？

オマケ：関数回路、関数式、関数

- 対象：N^nの形の集合
- 射：関数あるいは部分関数

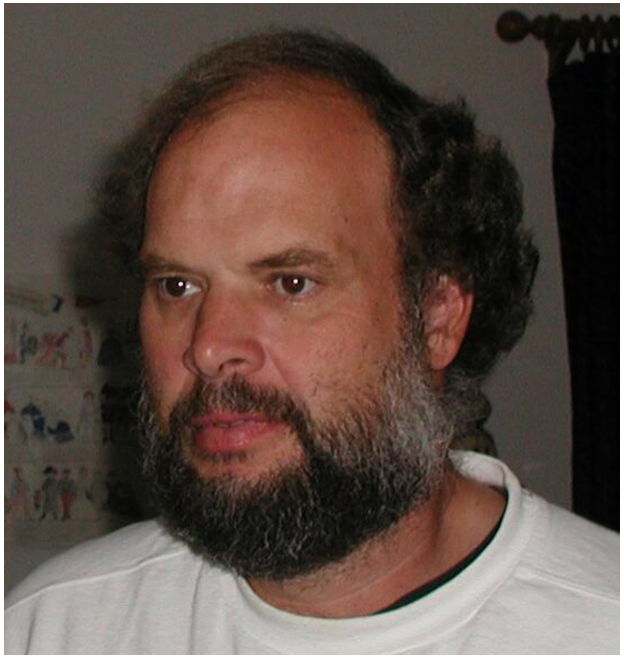
穴あき生け垣の圏から、上のような圏への対応（関手）は、何で／どうやって決まるだろう？

ブレーク

- また、一休みとか
- また、質疑応答とか

単純平面タングル（Simple Planar Tangle）

- ネタもと http://www.imsc.res.in/~sunder/canq.pdf



ジョーンズ
http://math.berkeley.edu/~vfr/

サンダー
http://www.imsc.res.in/~sunder/

SPTの素材

SPT（Simple Planar Tangle）は平面内の図形、まずは次を準備する。

1. 外円、テキトウでいい
2. 内円、外円の内部に描くならなんでもいい
3. 外円上のm個のマーク点（marked points/dots on outer circle）
4. 内円上のn個のマーク点（marked points/dots on inner circle）
5. n＞0 なら、特定された1個の内円マーク点（星印で表現）、n = 0 なら不要。
6. m＞0 なら、特定された1個の外円マーク点（星印で表現）、m = 0 なら不要。

いくつかのSTPを準備しよう。星印を忘れないように（僕は忘れる）。でもまだ、SPTを描き終わってない。

SPTは模様

SPTの本体は、外円と内円のあいだ（円環領域）に描かれた模様。

- 模様は交差しない紐の集合で、紐の境界があればそれは必ずマーク点
- 孤立した（紐の境界点ではない）マーク点があってはならない
- 大きさだの位置だの曲がり具合だの、その他細かいことは一切気にしない！
- 模様としての輪郭が同じなら、同じSPTとみなす（正確な定義は難しいが）

まー、ともかく描いてみる。
図形としての（トポロジカルな）同一性だけじゃなくて、星の位置重要。

SPTの圏

1. 対象は自然数 0, 1, 2, ...
2. 射はSPT A, B, C, ...
3. dom(A) = 内円のマーク点の個数
4. cod(A) = 外円のマーク点の個数
5. id(n) = 内外のマーク点をストレートに結んだ模様、星どおしを結ぶ
6. A;B は、Bの内円に、星印を基準としてAをはめ込んで、マーク点を調整してから消したもの。

PT(平面タングル）の解析はたいへんに困難、単純化したSPTでも十分に難しい。

SPT(0, 0)

SPT(0, 0)をいろいろな状況（条件付き）で考えてみよう。

1. ループを許さないなら
2. 単純な可縮ループだけなら
3. 同心円状に入れ子した可縮ループだけなら
4. 非可縮ループと単純な可縮ループだけなら
5. 同じ状況で、もしループがお互いにすり抜け可能なら
6. 非可縮ループはないが、任意の入れ子ループを許したら
7. 非可縮ループと任意の入れ子ループがあると

豚の顔が人の形の木になるよ。

n, mが小さいときの SPT(n, m)

1. SPT(0, 1)
2. SPT(1, 1)
3. SPT(2, 0)
4. SPT(0, 2)

SPT(2, 0)とSPT(0, 2)が同じように見えるのはなぜか？

オマケ：別な平面タングルと、その圏

今までの平面タングルのマーク点は円周上に乗るが、直線（または線分）上にマーク点を乗せたバージョンもある。これは、テンパリー ／ リーブ圏と呼ばれる。

http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/samson.abramsky/tambook.pdf 参照

さらに、ループが現れるとすぐさま消えるとみなすと簡単になる。簡単にしたTL(n, n)内の $H_1, \ldots, H_{n-1}$ は次を満たす。

- $H_i;H_j;H_i = H_i$ （iとjが隣り合ってる）
- $H_i;H_i = H_i$
- $H_i;H_j = H_j;H_i$ （iとjが離れている）

これらの等式だけで、図形を参照しなくても計算は可能。絵が理解できないコンピュータにも計算できる。

オマケ：複圏（マルチカテゴリー）

圏以外に、複圏（multicategory, operad）、多圏（polycategory）なんて構造もあるよ。

穴あき木は複圏の射（オペレータ）とも考えられる。

平面タングルは複圏の射として定義するほうが包括的。

オマケ：3次元タングルと、その圏

むっずかしい。

結び目、からみ目を含む非常に一般的な圏。

さまざまな次元のタングルの圏の構造が分かると、高次圏の構造もかなりわかるだろうと予測されている（タングル仮説）。

それから

他にも楽しい圏、面白い圏、変わった圏が色々あるよ。

最後に

もうウジャウジャいるよ。

圏は友達だ。