ホモロジー代数と導来圏

2003.10.

目 次

0　Introduction（という名の言い訳？）

これは，筆者が導来圏を勉強するために用意したもので，圏論のレベルでのホモロジー代数と導来圏に関する基礎的な事柄に証明をつけたものです．構成は，[KS] を利用していますが，証明などを付け加えたところもあります．というよりも，さらりと流されているかなり多くの箇所に，我流で（つまりひどくぎこちない方法で）証明をつけました．

ぶっちゃけホモロジー代数は何かを読んだり講義を聴いたりして勉強しても，自分で手を動かさない限り身に付かないと思われますし，かなり必要に迫られないと身に付かないということもあります．これはあくまでも筆者の備忘録です．

導来圏というものをなぜ導入しなければならないのかということについて，筆者は何も確定的なことを述べられません.「コホモロジーをとることによって失われる情報をスペクトル系列を用いて復元する」というホモロジー代数の「面倒臭さ」を改良するために,「コホモロジーを取らないで複体のまま扱うこと」がひとつの目標であることはよく言われます（例えば [TH]）．また導来函手の議論をうまく機能させるためとも。そのためには，擬同型 (quasi-isomorphism) を同型とみなすこととホモトープな射を同一視することが要請されるため，導来圏とは複体の圏からそれらの要請を満たすようにして作られたものです．

具体的には次のようにして定義されます．この定義を証明つきで追いかけることがこの paper のひとつの目標です．

まず C を Abel 圏とし，C の対象を成分とする複体の圏を $\mathbf{C}(C)$ とかくことにします．この圏も Abel 圏になります．さて，2 つの複体の間の homptope な射を同一視して（つまり $\mathrm{Hom}_C(X,Y)/\mathrm{homotope}$ を新たな射の集合として）新しい圏 $\mathbf{K}(C)$ が定義できます．これを homotopy 圏と呼びます．この homotopy 圏には Shift 函手と呼ばれる圏の同型があり，これを用いると $\mathbf{K}(C)$ は三角圏となることがわかります．

つぎに重要なことは，圏の局所化の概念です．これは加群の局所化のアナロジーとして理解できます．すなわち圏 C の射の族 S として乗法系と呼ばれるものを取り，それを同型射とするような圏として universal に存在するもの，それが局所化された圏 C_S です．これの構成は，著しく気分を萎えさせること請け合いです．さて，圏の局所化の特別な場合として，三角圏の null system を用いた局所化というものがあり，これによる局所化で三角圏が再び作れます．これを前述の homotopy 圏の場合に適用します．

$\mathbf{K}(C)$ には，すべてのコホモロジー群が消えている複体というものがあり，これが null system になります．これに付随して乗法系が得られるのですが，それは擬同型な射の集合となります．これによって homotopy 圏 $\mathbf{K}(C)$ を局所化して得られる新しい圏が導来圏 $\mathbf{D}(C)$ というわけです．

$$
\begin{array}{lcll}
C\ \ \text{（Abel 圏）} & \rightsquigarrow & \mathbf{C}(C) & \text{(Abel 圏)} \\
 & \overset{\text{homotope な射を同一視}}{\rightsquigarrow} & \mathbf{K}(C) & \text{(Abel 圏＆三角圏)} \\
 & \overset{\text{局所化}}{\rightsquigarrow} & \mathbf{D}(C) & \text{(三角圏 } \textit{not possibly} \text{ Abel 圏)}
\end{array}
$$

このような構成ですから，原理的には，Abel 圏があれば必ず導来圏は構成することができます．しかし，導来圏が再び Abel 圏になるとは限りませんし，さらに導来圏の詳細な構造もこのままではよくわかりません．

しかし，もともとの Abel 圏にある程度の条件（ある性質を満たす充満部分圏の存在）があると，導来圏の構造はもう少しわかりやすいもの（充満部分圏からできる homotopy 圏の局所化）になります．特に，もとの C が enough injective（十分豊富な単射的対象

を持つ）ならば，

$$K^+(I) \cong D^+(C)$$

なる圏同値が成り立ちます．ここで I は単射的対象のなす充満部分圏であり，K^+ は下に有界な複体のつくる homotopy 圏，D^+ はその局所化によって得られる導来圏を意味します．結局この場合は，出来上がった導来圏の構造は単に homotopy 圏に他ならないことになります．

このあたりまでを証明することが基本的にこの paper の目標となっています．

最初の 3 章は圏論的ホモロジー代数の基礎的なことについて書きましたが，まだ特に第 3 章の複体の圏のコホモロジーに関することが不十分です[1]．特に，必ずしも Abel 圏とは限らない圏について扱う場合は，圏の対象から元を取ることが御法度です．Abel 圏の場合は何らかの加群の圏に埋め込めるという大きな定理があって，それを認めれば元をとって議論することもできますが，ここではあえてどちらの場合も，元をとったりしないで，圏論の枠内で証明をつけるべく努力しました．

第 4 章から第 7 章が導来圏に向けて進む本論です．第 4 章では写像錘の概念を導入して，homotopy 圏が三角圏となることを証明しています．第 5 章で三角圏の定義を与え，第 6 章で圏の局所化の一般論について述べてから，第 7 章で導来圏の導入といくつかの構造定理を証明しました．上で説明したことが大体ここまでの章で書かれています．

第 8 章は導来函手について述べました．存在するための条件についての基本的な定理の証明をつけることが目標です．

ここまでが大体本論です．この paper では例と呼びうるものをほとんどあげませんでした[2]．ただひたすら可換図式と格闘することがメインになっていて，筆者以外の誰かが読むのは著しく困難かと思います．しかし，non-trivial な例をつけるためには，そのためだけに準備がいろいろと必要になり，畢竟筆者の予備知識の限界を越えてしまうことが予想されます．最後に Appendix として example をつける努力をしましたが，当然のこと著しく不十分です[3]．主に導来函手に関する例が中心ですが，同時に導来圏の言葉を使って（はじめて）述べることができる定理というものはいろいろ存在するようです.（例えば Riemann-Hilbert 対応.）また，導来圏としての同値 (Derived Equivalence:= 三角圏としての同値) は筆者の専攻でもある表現論においてもしばしば現れます．後々，そのような例をいろいろと追加できれば良いとは思いますが，いずれにしても当分先の話になるでしょう．

[1] 2003.11.10. 現在
[2] 2003.11.10. 現在
[3] 2003.11.10. 現在

1　圏と函手

まず圏と函手に関する基礎的な定義から始める．

1.1　圏

定義 1.1.
(1)　圏 C とは，$(\mathrm{Ob}(C), \mathrm{Hom}_C(X,Y), \mathrm{Hom}_C(X,Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_C(X,Z))$ なる 3 つ組であって，
　(i)　射の合成は結合的．
　(ii)　$X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$id_X \in \mathrm{Hom}_C(X,X)$ が存在し，

$$f \circ id_X = f, id_X \circ g = g \quad (f \in \mathrm{Hom}_C(X,Y), g \in \mathrm{Hom}_C(Y,X))$$

をみたすもののことを言う．
(2)　圏 C の部分圏 C' とは，
　(i)　$\mathrm{Ob}\, C' \subset \mathrm{Ob}\, C$．
　(ii)　任意の対 (X,Y) に対して，$\mathrm{Hom}_{C'}(X,Y) \subset \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ であり，合成則が C から定まるもので与えられ，$id_X \in \mathrm{Hom}_{C'}(X,X)$ を満たすことを言う．更に，$\mathrm{Hom}_{C'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ が成り立つとき，C' を C の充満部分圏という．
(3)　圏 C の反対圏 C° とは，

$$\mathrm{Ob}\, C^\circ = \mathrm{Ob}\, C, \mathrm{Hom}_{C^\circ}(X,Y) = \mathrm{Hom}_C(Y,X)$$

で与えられるものを言う．
(4)　射 $f : X \to Y$ が同型とは，ある $g : Y \to X$ が存在して，

$$f \circ g = id_Y, g \circ f = id_X$$

が成り立つときを言う．
(5)　射 $f : X \to Y$ が単射 (monomorphism) とは，どんな $W \in \mathrm{Ob}\, C$ に対しても

$$\text{対}\,(g,g') \subset \mathrm{Hom}_C(X,Y)\,\text{が,}\; f \circ g = f \circ g'\,\text{を満たすならば}\; g = g'$$

が成り立つことを言う．

$$W \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

(6)　射 $f : X \to Y$ が全射 (epimorphism) であるとは，f が C° の単射であること．すなわち，どんな $Z \in \mathrm{Ob}\, C$ に対しても

$$\text{対}\,(h,h') \subset \mathrm{Hom}_C(Y,Z)\,\text{が,}\; h \circ f = h' \circ f\,\text{をみたすなら}\; h = h'$$

が成り立つことを言う．

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y \underset{h'}{\overset{h}{\rightrightarrows}} Z$$

(7)　$P \in \mathrm{Ob}\, C$ が始対象であるとは，どんな $Y \in \mathrm{Ob}\, C$ に対しても $\mathrm{Hom}_C(P,Y)$ がただひとつの元からなることを言う．
　$Q \in \mathrm{Ob}\, C$ が終対象であるとは，どんな $Z \in \mathrm{Ob}\, C$ に対しても $\mathrm{Hom}_C(Z,Q)$ がただひとつの元からなることを言う．

注意 1.2.
(1) $X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$id_X \in \mathrm{Hom}_C(X, X)$ は unique.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "id_X"'] & & X \arrow[dl, "id_X"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(2) 集合とその間の写像からなる圏 **Set** と位相空間とその間の連続写像からなる圏 **Top** を考える．**Top** は **Set** の部分圏だが，充満ではない．
(3) 2 つの始対象は同型．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "id_X"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(4) 可換環とその間の (単位元を単位元にうつす) 準同型からなる圏 **Ring** において，$\mathbb{Z}$ は始対象．（$f(1) = 1_R$ から $nf(1) = n1_R = n$ と unique に決まってしまう．）

次に，圏における同型射について述べておく[4]．

定義 1.3. 圏 C の射 $f \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ が同型射であるとは，$g \in \mathrm{Hom}_C(Y, X)$ が存在して，$f \circ g = \mathrm{id}_Y, g \circ f = \mathrm{id}_X$ が成り立つことを言う．

Remark 1.4. 一般に，全射かつ単射な射が同型射になるとは限らない．

例 1.5. 位相空間の圏 **Top**，Hausdorff 位相空間の圏 $\mathbf{Top_H}$ において，いずれも全射かつ単射な射は同型射ではない．これらの圏においては，全射な射，単射な射はそれぞれ全射連続写像，単射連続写像となるが，それだけでは同相写像であることは言えない．また Hausdorff 位相空間に限っても，f の全射性は，$f(X)$ が Y で稠密であることと同値であるが，やはり同相までは言えない．

しかし，Abel 圏においては，全射かつ単射な射は同型射となる．(あとの Abel 圏の項参照.）

1.2 函手

定義 1.6.
(1) C, C' を圏とするとき，C から C' への共変函手 F とは，写像 $F : \mathrm{Ob}\, C \to \mathrm{Ob}\, C'$ と写像 $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_C(F(X), F(Y))$ $(X, Y \in ObC)$ の組であって，
(i) $F(id_X) = id_{F(X)}$.
(ii) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.
をみたすものを言う．また，C° から C' への共変函手を C から C' への反変函手という．
(2) F_1, F_2 を C から C' への函手とするとき，F_1 から F_2 への函手の射 θ とは，任意の

[4] 同型射に関する記述が不十分であるとの指摘を K.K. 氏（京都大）から頂き，追加しました．ご指摘ありがとうございました．

$X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$\theta(X) \in \mathrm{Hom}_{C'}(F_1(X), F_2(X))$ が与えられていて，任意の $f \in \mathrm{Hom}_C(X,Y)$ に対して，次の可換図式を満たすことを言う；

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, "\theta(X)"] \arrow[d, "F_1(f)"'] & F_1(X) \arrow[d, "F_2(f)"] \\ F_1(Y) \arrow[r, "\theta(Y)"'] & F_2(Y) \end{tikzcd}$$

(3) 函手 $F : C \to C'$ が忠実充満であるとは，任意の対 $(X,Y) \subset \mathrm{Ob}\, C$ に対して，写像 $\mathrm{Hom}_C(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{C'}(F(X), F(Y))$ が bijective であることを言う．

さらに，任意の $X' \in \mathrm{Ob}\, C'$ に対して，ある $X \in \mathrm{Ob}\, C$ と同型 $X' \to F(X)$ が存在するとき，F は圏同値であるという．

Claim 1.7. $X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，

$$F := \mathrm{Hom}_C(X, *); \mathrm{Ob}\, C \ni Z \to \mathrm{Hom}_C(X,Z) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$$

は，C から $\mathbf{Set}$ への共変函手を与える．同様に，$X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_C(*, X); \mathrm{Ob}\, C \ni Z \to \mathrm{Hom}_C(Z,X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$$

は C から $\mathbf{Set}$ への反変函手を与える．

[証明] 共変のみ示す．

object の対応は与えられているので，射の対応を定める．実際，$f : Z \to W$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_C(X,Z) \ni \varphi \mapsto f \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_C(X,W)$$

とする;$X \xrightarrow{\varphi} Z \xrightarrow{f} W$．このとき，$F(id_Z)(\varphi) = id_Z \circ \varphi = \varphi$．また，$f \in \mathrm{Hom}_C(Z,W), g \in \mathrm{Hom}_C(W,V)$ に対して，

$$\begin{array}{ccccccc} F(g) \circ F(f) & ; & \mathrm{Hom}_C(X,Z) & \to & \mathrm{Hom}_C(X,W) & \to & \mathrm{Hom}_C(X,V) \\ & & \varphi & \mapsto & f \circ \varphi & \mapsto & g \circ f \circ \varphi \\ F(g \circ f) & ; & \mathrm{Hom}_C(X,Z) & \to & \mathrm{Hom}_C(X,V) & & \\ & & \varphi & \mapsto & (g \circ f) \circ \varphi & & \end{array}$$

となって函手の定義を満たすことが示された． ■

Claim 1.8. C, C' を 2 つの圏とするとき，C から C' への共変函手を対象とし，函手の間の射を射とすることで新たな圏が定義できる．

[証明] 実際，$\mathrm{Hom}(F_1, F_2) \times \mathrm{Hom}(F_2, F_3) \to \mathrm{Hom}(F_1, F_3); (\theta, \varphi) \mapsto \varphi \circ \theta$ とすれば，結合的なのは明らか．$id_F(X) = id_{F(X)}$ と定義すれば，函手の間の恒等射 $id_F \in \mathrm{Hom}(F,F)$ が定義できる． ■

Claim 1.9. 次は同値.
(1) F は圏同値.
(2) $F' : C' \to C$ であって，函手の同型 $F \circ F' \cong id_{C'}, F \circ F' \cong id_C$ を与えるものが存在する.

[証明] (1) $\Rightarrow$ (2) を示す.

まず，圏同値の定義の前半から $X' \in \mathrm{Ob}\, C'$ に対して，$F(X) \cong X'$ となるような $X \in \mathrm{Ob}\, C$ が取れる．そこで，$F'(X') := X$ と定義する．また，ここで $\varphi(X) : F(X) \cong X'$ とおき，$f \in \mathrm{Hom}_{C'}(X', Y')$ に対して，${F'}_f = \varphi(Y)^{-1} \circ f \circ \varphi(X) \in \mathrm{Hom}_{C'}(F \circ F'(X'), F \circ F'(Y'))$ と定義する．ここで圏同値の定義の前半によって $\mathrm{Hom}_{C'}(F \circ F'(X'), F \circ F'(Y')) \cong \mathrm{Hom}_C(F'(X'), F'(Y'))$ であるから，${F'}_f$ に対応する $\mathrm{Hom}_C(F'(X'), F'(Y'))$ の元を $F'(f)$ とすることによって函手 $F' : C' \to C$ が定まる．定義より明らかに，$\varphi = \{\varphi(X)\}$ が函手の同型 $F \circ F' \cong id_{C'}$ を与える.

$$\begin{tikzcd}
id_{C'}(X') = X' \arrow[d, "f"'] & F(X) = F \circ F'(X') \arrow[l, "\varphi(X)"'] \arrow[d, "{F'}_f"] & F'(X') \arrow[d, "F'(f)"] \\
id_{C'}(Y') = Y' \arrow[r, "\varphi(Y)^{-1}"'] & F(Y) = F \circ F'(Y') & F'(Y')
\end{tikzcd}$$

次に，$\varphi(X) \in \mathrm{Hom}_{C'}(F(X), X')$ なる同型であったが，$F(X) = F \circ F'(X') = F \circ F' \circ F(X)$ に注意すると，$\varphi(X) \in \mathrm{Hom}_{C'}(F \circ F' \circ F(X), F(X))$ となる．再び圏同値の定義の前半から $\varphi(X) = F(f(X))$ となる $f(X) \in \mathrm{Hom}_C(F' \circ F(X), X)$ が存在し，$f = \{f(X)\}$ が $F' \circ F \cong id_C$ なる函手の同型を与える.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す.

φ を函手の同型 $F \circ F' \cong id_{C'}$ を与える射とするとき，$X' \in \mathrm{Ob}\, C'$ に対して $F'(X') = X$ とおくと，$F \circ F(X') = F(X)$ に注意すれば，$\varphi(X') : F \circ F'(X') \to id'_C(X') = X'$ によって $F(X) \cong X'$ なる同型が得られる．従って，圏同値の定義の後半は成立.

まず F の忠実性を示す．$\theta(X) : F' \circ F(X) \to X$ を函手の同型 $F' \circ F \cong id_C$ を与える射とするとき，$f : X \to Y$ は

$$f = \theta(Y) \circ F' \circ F(f) \circ \theta(X)^{-1}$$

とかける.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta(X)^{-1}"] \arrow[d, "f"'] & F' \circ F(X) \arrow[d, "F' \circ F(f)"] \\
Y & F' \circ F(Y) \arrow[l, "\theta(Y)"]
\end{tikzcd}$$

従って，$F(f) = F(g)$ ならば $F' \circ F(f) = F' \circ F(g)$ より，上のことから $f = g$ が従う．よって $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{C'}(FX, FY)$ なる F の忠実性が従う．同様に，$\mathrm{Hom}_{C'}(X', Y') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_C(F'X', F'Y')$ なる F' の忠実性も従う.

次に F の充満性を示す．$\alpha \in \mathrm{Hom}_{C'}(FX, FY)$ に対して，$f = \theta(Y) \circ F'(\alpha) \circ \theta(X)^{-1}$ によって $f \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ を定めると，前と同様に，$f = \theta(Y) \circ (F \circ F')(f) \circ \theta(X)^{-1}$ であるから，$F'(\alpha) = F' \circ F(f)$ となり，F' の忠実性から $\alpha = F(f)$ となる.

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "\alpha"] & F' \circ F(X) \arrow[r, "\theta(X)"] \arrow[d, "F'(\alpha)"'] & X \arrow[d, "f"] & F' \circ F(X) \arrow[l, "\theta(Y)"'] \arrow[d, "F' \circ F(f)"] \\
F(Y) & F' \circ F(Y) \arrow[r, "\theta(Y)"'] & Y & F' \circ F(Y) \arrow[l, "\theta(X)"]
\end{tikzcd}$$

これにより，全射 $\mathrm{Hom}_C(X,Y)\,\mathrm{Hom}_{C'}(FX,FY)$ が言え，F の充満性が示された． ■

1.3 表現可能函手と米田の補題

ここでは表現可能函手の定義を行う．これは，あとで Abel 圏において核や余核などを定義する際に用いられるし，普遍写像性質を持つような対象を記述する際にも用いられる．

定義 1.10. 函手 $F : C \to \mathbf{Set}$ が表現可能であるとは，$X \in \mathrm{Ob}\, C$ であって，$F \cong \mathrm{Hom}_C(X,*)$ なる函手の同型が成り立つものが存在するときを言う．

Claim 1.11. 函手 F が表現可能なとき，F を represent する対象 X は同型を除いて一意的に定まる．

[証明] X と Y がともに F を represent する対象であるとする．まず，F と $\mathrm{Hom}_C(X,*)$，F と $\mathrm{Hom}_C(Y,*)$ がそれぞれ函手として同型であることにより，$\forall f \in \mathrm{Hom}_C(Y,X)$ に対して，次の可換図式が成立する；

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(Y,Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f) = f\circ *"'] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] & \mathrm{Hom}_C(X,Y) \arrow[l, "\theta(Y)"'] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f) = f\circ *"] \\
\mathrm{Hom}_C(Y,X) \arrow[r, "\varphi(X)"'] & F(X) & \mathrm{Hom}_C(X,X) \arrow[l, "\theta(X)"]
\end{tikzcd}$$

そこで，上の図式において，

$$\begin{aligned}
id_Y &\overset{\varphi(Y)}{\longmapsto} \tilde{\psi} \overset{\theta(X)^{-1}}{\longmapsto} \tilde{\eta}, \\
id_X &\overset{\theta(X)}{\longmapsto} \psi \overset{\varphi(Y)^{-1}}{\longmapsto} \eta,
\end{aligned}$$

とし，さらに上の図式で特に $f = \eta$ とったものを考えると，左側の可換性から $\psi = F(\eta)\tilde{\psi}$ が成り立つ．このことと右側の可換性から $\eta \circ \tilde{\eta} = id_X$ となる．逆も同様に示せる．こうして $X \cong Y$ が示された． ■

次に「米田の補題」と呼ばれている命題を証明する．

命題 1.12. $C^\vee$ を C から $\mathbf{Set}$ への反変函手のなす圏とし，函手

$$H : C \to C^\vee; X \mapsto \mathrm{Hom}_C(*,X)$$

を考える.
(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}\, C, F \in \mathrm{Ob}\, C^{\vee}$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{C^{\vee}}(H(X), F) \cong F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$$

が成り立つ.
(2) 函手 H は忠実充満である.

[証明] (2) は, (1) の結果を $F := H(Y)$ に適用すれば,

$$\mathrm{Hom}_{C^{\vee}}(H(X), H(Y)) \cong H(Y)(X) = \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

より H が忠実充満であることが従う.
(1) を示す.
まず $f \in \mathrm{Hom}_{C^{\vee}}(H(X), F)$ なる函手の間の射に対して, $\phi(f) \in F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{set})$ を次で定義する. すなわち,

$$H(X)(X) = \mathrm{Hom}_C(X, X) \ni id_X \overset{f(X)}{\longmapsto} \phi(f) \in F(X)$$

とする.
逆に, $s \in F(X)$ から函手の間の射 $\psi(s) \in \mathrm{Hom}_{C^{\vee}}(H(X), F)$ を次で定義する. すなわち, $Y \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して $\psi(s)(Y) : H(X)(Y) \to F(Y)$ を

$$\begin{array}{ccccccc} H(X)(Y) & = & \mathrm{Hom}_C(Y, X) & \xrightarrow{F} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(Y), F(X)) & \longrightarrow & F(Y) \\ & & \theta & \longmapsto & F(\theta) & \longmapsto & F(\theta)(s) \end{array}$$

と定義する. これが函手の間の射となっていることは, $\alpha : Y \to Y'$ に対して, $F(\theta \circ \alpha)(s) = F(\alpha)F(\theta)(s)$ から従う;

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Y, X) = H(X)(Y) \arrow[r, "\psi(s)(Y)"] \arrow[d, "* \circ \alpha = H(X)(\alpha)"', "\theta \mapsto \theta \circ \alpha"] & F(Y) \arrow[d, "F(\alpha)", "F(\theta)(s) \mapsto F(\theta \circ \alpha)(s) = F(\alpha)F(\theta)(s)"'] & Y \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathrm{Hom}(Y', X) = H(X)(Y') \arrow[r, "\psi(s)(Y')"'] & F(Y') & Y'
\end{tikzcd}$$

このようにして構成した ϕ と ψ が互いに逆写像となっていることを確かめる.
まず

$$\begin{aligned} \phi(\psi(s)) &= \psi(s)(X)(id_X) \quad (\because\ \phi\text{の定義}) \\ &= F(id_X)(s) \quad (\because\ \psi\text{の定義}) \\ &= s \end{aligned}$$

となるので, $\phi \circ \psi = id_{F(X)}$ となる.
逆に, $f \in \mathrm{Hom}_{C^{\vee}}(H(X), F), \theta \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ に対して,

$$\begin{aligned} \psi(\phi(f))(Y)(\theta) &= F(\theta)(\phi(f)) \quad (\because\ \psi\text{の定義}) \\ &= F(\theta)(f(X)(id_X)) \quad (\because\ \phi\text{の定義}) \\ &= f(Y)(\theta) \quad (\because\ f\text{が函手の間の射}) \end{aligned}$$

となる．ここで最後の等号は下の可換図式による；

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "*\circ\theta"'] & F(X) \arrow[d, "F(\theta)"] \\
\mathrm{Hom}(Y,X) \arrow[r, "f(Y)"'] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

以上により，求める同型が示された． ■

注意 1.13.
(1) 反変函手 $F : C \to \mathbf{Set}$ が表現可能とは，$F \cong H(X) = \mathrm{Hom}_C(*, X)$ となるような $X \in \mathrm{Ob}\, C$ が存在することを言う．
(2) $C^\vee$ の反対圏を $C^\wedge$ とかくと，これは C から $\mathbf{Set}$ への共変函手のなす圏となる．

Claim 1.14. $C^\wedge = C^{\vee o \vee}$ なる圏同値が成り立ち，$H' : C \to C^\wedge; X \mapsto \mathrm{Hom}_C(X, *)$ は忠実充満である．

2 Abel 圏

ここでは，加法圏と Abel 圏に関する定義と基本的な性質を述べる．

2.1 加法圏と加法的函手

ここでは加法圏を定義し，直和や直積を表現可能函手の representative と捉え，その普遍性などについて述べる．

定義 2.1.
(1) 圏 C が加法圏であるとは，次の 4 条件を満たすことを言う；
(i) 任意の対 $(X, Y) \subset \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$\mathrm{Hom}_C(X, Y)$ がアーベル群の構造を持ち，射の合成が双線形性を満たす．
(ii) $\exists 0 \in \mathrm{Ob}\, C$ s.t. $\mathrm{Hom}_C(0, 0) = \{0\}$.
(iii) 任意の対 $(X, Y) \subset \mathrm{Ob}\, C$ に対して，函手

$$W \mapsto \mathrm{Hom}_C(X, W) \times \mathrm{Hom}_C(Y, W)$$

が表現可能.（その representative を $X \oplus Y \in \mathrm{Ob}\, C$ と書いて，X と Y の直和という.）
(iV) 任意の対 $(X, Y) \subset \mathrm{Ob}\, C$ に対して，函手

$$W \mapsto \mathrm{Hom}_C(W, X) \times \mathrm{Hom}_C(W, Y)$$

が表現可能.（その representative を $X \times Y \in \mathrm{Ob}\, C$ と書いて，X と Y の直積という.）
(2) C, C' を加法圏とするとき，函手 $F : C \to C'$ が加法的函手であるとは，任意の対

$(X, Y) \subset \mathrm{Ob}\, C$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{C'}(FX, FY)$$

がアーベル群の準同型となることを言う.

Claim 2.2. (1)-(iii) で存在を仮定している直和 $X \oplus Y$ は次の普遍性を満たす. すなわち,

$$\mathrm{Hom}_C(X \oplus Y, X \oplus Y) \cong \mathrm{Hom}_C(X, X \oplus Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, X \oplus Y); id_{X \oplus Y} \mapsto (\iota_X, \iota_Y)$$

とするとき[5], $\forall W \in \mathrm{Ob}\, C, \forall f \in \mathrm{Hom}_C(X, W), \forall g \in \mathrm{Hom}_C(Y, W)$ に対して, 次の図式を可換にするような $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(X \oplus Y, W)$ が一意的に存在する;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\iota_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \oplus Y \arrow[r, dashed, "\exists_1 \varphi"] & W \\ Y \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

[証明] (1)-(iii) の representative を Z と書くことにすると, 定義の函手の表現可能であるという性質から, W に関する函手の間の同型射によって

$$\mathrm{Hom}_C(Z, W) \cong \mathrm{Hom}_C(X, W) \times \mathrm{Hom}_C(Y, W); \varphi \mapsto (f, g)$$

となる $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(Z, W)$ が取れる. しかもこれが函手の間の同型射であることにより, 次の図式が可換となる;

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_C(Z, Z) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi \circ *"'] & \mathrm{Hom}_C(X, Z) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \arrow[d, "(\varphi \circ *, \varphi \circ *)"] \\ \mathrm{Hom}_C(Z, W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_C(X, W) \times \mathrm{Hom}_C(Y, W) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} id_Z \arrow[r] \arrow[dd, "\varphi \circ *"'] & (\iota_X, \iota_Y) \arrow[d] \\ & (\varphi \circ \iota_X, \varphi \circ \iota_Y) \arrow[d, equal] \\ \varphi \arrow[r] & (f, g) \end{tikzcd}$$

これによって, 求める図式の可換性が従う.

φ の一意性は同型 $\mathrm{Hom}_C(Z, W) \cong \mathrm{Hom}_C(X, W) \times \mathrm{Hom}_C(Y, W)$ により明らか. ■

Claim 2.3. (1) において, (i) かつ (ii) の仮定の下では, (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) であり, それぞれの representative は同型.

[証明]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\iota_X"'] \arrow[dr, "id_X"] & \\ X \oplus Y \arrow[r, dashed, "\exists_1 p_X"] & X \\ Y \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\iota_X"'] \arrow[dr, "0"] & \\ X \oplus Y \arrow[r, dashed, "\exists_1 p_Y"] & Y \\ Y \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[ur, "id_Y"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "\iota_X"'] \arrow[dr, "\iota_X"] & \\ X \oplus Y \arrow[r, dashed, "\iota_X \circ p_X + \iota_Y \circ p_Y"'] & X \oplus Y \\ Y \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[ur, "\iota_Y"'] & \end{tikzcd}$$

[5] ここで, 函手 $W \mapsto \mathrm{Hom}_C(X, W) \times \mathrm{Hom}_C(Y, W)$ の表現可能であるという性質を利用している. すなわち, この函手が $\mathrm{Hom}_C(X \oplus Y, *)$ という函手と同型なのであるから, とくに $X \oplus Y \in \mathrm{Ob}\, C$ に関する函手の間の同型写像を用いることで求める同型対応がえられている.

$X \oplus Y$ の普遍性から，上図の 1 番目，2 番目を可換にするような p_X, p_Y が存在する．このとき，

$$\iota_X \circ p_X \circ \iota_X + \iota_Y \circ p_Y \circ \iota_X = \iota_X, \iota_X \circ p_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ p_Y \circ \iota_Y = \iota_Y$$

により上図の 3 番目の図式が可換となる．再び $X \oplus Y$ の普遍性から

$$\iota_X \circ p_X + \iota_Y \circ p_Y = id_{X \oplus Y}$$

が成り立つ．

さて，$W \in \mathrm{Ob}\, C, \alpha \in \mathrm{Hom}_C(W, X), \beta \in \mathrm{Hom}_C(W, Y)$ とするとき，$\varphi = \iota_X \circ \alpha + \iota_Y \circ \beta$ とおくと

$$p_Y \circ \varphi = p_Y \circ \iota_X \circ \alpha + p_Y \circ \iota_Y \circ \beta = \beta$$

を得る．同様に $p_X \circ \varphi = \alpha$ も言える．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, bend right, dotted, "\iota_X"'] & & \\
& X \oplus Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] & W \arrow[l, dashed, "\varphi"'] \arrow[ull, "\alpha"'] \arrow[dll, "\beta"] \\
Y \arrow[ur, bend left, dotted, "\iota_Y"] & &
\end{tikzcd}$$

逆に φ がこの図式を可換にするときには，$\iota_X \circ p_X + \iota_Y \circ p_Y = id_{X \oplus Y}$ に注意すると

$$\varphi = (\iota_X \circ p_X + \iota_Y \circ p_Y) \circ \varphi = \iota_X \circ p_X \circ \varphi + \iota_Y \circ p_Y \circ \varphi = \iota_X \circ \alpha + \iota_Y \circ \beta$$

となる．こうして図式を可換にする $\varphi \in \mathrm{Hom}_C(W, X \oplus Y)$ が一意的に存在することが示された．

これは，前の claim と同様に直積の普遍性となっており，このことから $(iii) \Rightarrow (iv)$ が示され，$X \oplus Y \cong X \times Y$ となった．逆も同様に示せばよい． ■

2.2 核と余核

ここでは核と余核を，やはり表現可能函手の representative として捉え，その普遍性などについて述べる．

C を加法圏，$Z \in \mathrm{Ob}\, C, f : X \to Y$ とする．このとき，2 つのアーベル群の準同型を定義する；

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(Z, f) &: \mathrm{Hom}_C(Z, X) \to \mathrm{Hom}_C(Z, Y); f \circ *, \\ \mathrm{Hom}_C(f, Z) &: \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_C(X, Z); * \circ f. \end{aligned}$$

定義 2.4.

(1) 反変函手 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(*, f)) : C \to \mathrm{Ab}$，すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}\, C \ni Z &\longmapsto \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(Z, f)) := \{u \in \mathrm{Hom}_C(Z, X) | f \circ u = 0\} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ab}), \\ \mathrm{Hom}_C(Z, W) \ni \alpha &\longmapsto [\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(W, f)) \ni v \mapsto v \circ \alpha \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(Z, X))], \end{aligned}$$

によって定まる反変函手を考える．これが表現可能であるとき，その representative を $\mathrm{Ker}\, f \in \mathrm{Ob}\, C$ とかいて，f の核という．
(2) 共変函手 $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(f, *)) : C \to \mathrm{Ab}$，すなわち

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ob}\, C \ni Z & \longmapsto & \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(f, Z)) := \{u \in \mathrm{Hom}_C(Y, Z) | u \circ f = 0\} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Ab}), \\ \mathrm{Hom}_C(Z, W) \ni \alpha & \longmapsto & [\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(f, Z)) \ni v \mapsto \alpha \circ v \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(f, W))], \end{array}$$

によって定まる共変函手を考える．これが表現可能であるとき，その representative を $\mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{Ob}\, C$ とかいて，f の余核という．

以下，核と余核の性質を見ていく．

Claim 2.5. $f : X \to Y$ に対して次が成立．
(1) $\mathrm{Ker}\, f = 0 \Leftrightarrow f$ が単射 (monomorphism).
(2) $\mathrm{Coker}\, f = 0 \Leftrightarrow f$ が全射 (epimorphism).

[証明] (2) は (1) の矢印をすべて逆にすればよいので (1) のみ示す．

$\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ とする．定義の反変函手が表現可能であることから，$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(*, f)) \cong \mathrm{Hom}_C(0, *)$ なる函手の同型が成り立つ．そこで，$g, g' \in \mathrm{Hom}_C(W, X)$ とし，$f \circ g = f \circ g'$ であるとすると，$f \circ (g - g') = 0$ である．函手の同型を W に対応する函手の間の同型射に関して用いると

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(W, f)) \ni g - g' \mapsto 0 \in \mathrm{Hom}_C(0, W)$$

なるアーベル群の同型対応が成り立つ.（0 は始対象であることに注意.）よって $g - g' = 0$，つまり $g = g'$ でなければならない．これは f が momomorphism であることを意味している．

逆に，f が monomorphism であるとする．$\forall W \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(W, f)) = \{u \in \mathrm{Hom}_C(W, X) | f \circ u = 0\} \ni 0$ であるが，f が monomorphism であることにより，これは $\{0\}$ でなければならない．一方 $\mathrm{Hom}_C(0, W) = \{0\}$ であることから，$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(W, f)) = \mathrm{Hom}_C(0, W)$ となる．よって 0 が求める representative であり，これは $\mathrm{Ker}\, f = 0$ を意味している． ■

次に，核と余核の満たす普遍性を調べよう．

f が核をもつとき，定義の反変函手の表現可能であるという性質から，函手の同型

$$\mathrm{Hom}_C(*, \mathrm{Ker}\, f) \cong \mathrm{Hom}_C(*, f) \subset \mathrm{Hom}_C(*, X)$$

が成り立つ．この函手の間の射を β とかく．これを特に $\mathrm{Ker}\, f$ に関する同型射とみたときの恒等射の像 $\beta(\mathrm{Ker}\, f)(id_{\mathrm{Ker}\, f}) =: \alpha$ と定義する．このとき，$\alpha : \mathrm{Ker}\, f \to X$ である．一方，函手の間の射であることから，$\forall Z \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，次の可換図式が成立する；

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Ker}\, f, \mathrm{Ker}\, f) \arrow[r, "\beta(\mathrm{Ker}\, f)"] \arrow[ddd, "\varphi \circ *"'] & \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(\mathrm{Ker}\, f, f)) \subset \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Ker}\, f, X) \arrow[ddd, "* \circ \varphi"] \\ id_{\mathrm{Ker}\, f} & \alpha \\ \varphi & \alpha \circ \varphi \\ \mathrm{Hom}_C(Z, \mathrm{Ker}\, f) \arrow[r, "\beta(Z)"'] & \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(Z, f)) \subset \mathrm{Hom}_C(Z, X) \end{tikzcd}$$

これにより $\beta(Z)(\varphi) = \varphi \circ \alpha$ が成り立ち，これは $\beta(Z) = \mathrm{Hom}_C(Z, \alpha)$，つまり $\beta = \mathrm{Hom}_C(*, \alpha)$ であることを意味している．

Claim 2.6. 上で導入した $\alpha : \mathrm{Ker}\, f \to X$ は次の普遍性を満たす；すなわち，$Z \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$g \in \mathrm{Hom}_C(Z, X)$ が $f \circ g = 0$ を満たすならば，$\varphi \in \mathrm{Hom}_C(Z, \mathrm{Ker}\, f)$ であって $\alpha \circ \varphi = g$ を満たすものが一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dashed, "\exists_1 \varphi"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
& \mathrm{Ker}\, f \arrow[u, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

[証明] $f \circ g = 0$ であることから $g \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_C(Z, f))$．従って，$\beta(Z)^{-1}(g) = \varphi \in \mathrm{Hom}_C(Z, \mathrm{Ker}\, f)$ とおけば，$g = \varphi \circ \alpha$ となる．一意性は $\beta(Z)$ が同型射であることから明らか． ■

Claim 2.7. $\mathrm{Coker}\, f$ についても同様に，$\delta : \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Coker}\, f, *) \to \mathrm{Hom}_C(Y, *)$ が存在して，次の普遍性を満たす $\gamma : Y \quad \to \mathrm{Coker}\, f$ によって $\delta = \mathrm{Hom}_C(\gamma, *)$ とかける．γ の満たす普遍性は次で与えられる；すなわち，$W \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$h \in \mathrm{Hom}_C(Y, W)$ が $h \circ f = 0$ を満たすならば，$\psi \in \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Coker}\, f, W)$ であって $\psi \circ \gamma = h$ を満たすものが一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & W \\
& \mathrm{Coker}\, f \arrow[ur, dashed, "\exists_1 \psi"'] &
\end{tikzcd}$$

定義 2.8. 自然な写像 $\alpha : \mathrm{Ker}\, f \to X$ が余核をもつとき，$\mathrm{Coim}\, f$ とかき，f の余像という．また自然な写像 γ :Y→ $\mathrm{Coker}\, f$ が核をもつとき，$\mathrm{Im}\, f$ とかき，f の像という．

Claim 2.9. 自然な射 $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ が存在する．

[証明]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Coim}\, f \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \arrow[d, dashed, "\psi"] \\
\mathrm{Coker}\, f & Y \arrow[l, "\gamma"] & \mathrm{Im}\, f \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

まず $f \circ \alpha = 0$ であることと $\mathrm{Coim}\, f$ が α の余核であることにより，余核の普遍性から f は $\mathrm{Coim}\, f \xrightarrow{\varphi} Y$ を経由する．このとき更に $\gamma \circ \varphi = 0$ である.（なぜなら，$\gamma \circ f = 0$ なので $\gamma \circ f \circ \alpha = 0$ となり，$\gamma \circ f : X \to \mathrm{Coker}\, f$ が経由する $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Coker}\, f$ なる写像が一意的に存在するはずである．これは $\gamma \circ \varphi$ に他ならないが，$\gamma \circ f$ 自体が 0 であることより $\gamma \circ \varphi = 0$ となる.）

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, f \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r] \arrow[d, "0 = \gamma \circ f"'] & \mathrm{Coim}\, f \arrow[dl, dashed, "0 = \exists_1 = \gamma \circ \varphi"] \\
& \mathrm{Coker}\, f &
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Im} f$ が γ の核であることにより，核の普遍性から φ は $\psi : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ を経由することがわかる． ■

2.3 Abel 圏

ここでは Abel 圏の定義を述べ，そこでの完全列などについて調べる．

定義 2.10. 加法圏 C がアーベル圏であるとは，次の 2 条件を満たすことを言う；

(i) 任意の $f \in \operatorname{Hom}_C(X, Y)$ に対して，$\operatorname{Ker} f, \operatorname{Coker} f$ が存在.

(ii) 自然な射 $\operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ が同型.

定義 2.11.

(1) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ が完全であるとは，次の 2 条件を満たすことを言う；

(i) $g \circ f = 0$.

(ii) $\operatorname{Im} f \to \operatorname{Ker} g$ が同型.

(2) 加法的函手 $F : C \to C'$ が左 [resp. 右] 完全であるとは，

$$0 \to X \to X' \to X'' \quad [resp.\ X \to X' \to X'' \to 0]$$

なる完全列に対して，

$$0 \to F(X) \to F(X') \to F(X'') \quad [resp.\ F(X) \to F(X') \to F(X'') \to 0]$$

が再び完全列となることを言う．左完全かつ右完全であるとき単に完全であるという．

また反変函手については，$F : C^{\circ} \to C'$ とみて完全性を定める．

(3) $X \in \operatorname{Ob} C$ が単射的 [resp. 射影的] であるとは，$\operatorname{Hom}_C(, *X)$[resp.$\operatorname{Hom}_C(X, *)$] が完全函手であることを言う．

Claim 2.12. C がアーベル圏のとき，$\operatorname{Im} f \to \operatorname{Ker} g$ は自然に定まる．

[証明]

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
& \operatorname{Im} f \cong \operatorname{Coim} f \arrow[ur, dotted] \arrow[r, dashed] & \operatorname{Ker} g \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$f \circ \alpha = 0$ だから核の余核である $\operatorname{Coim} f$ の普遍性により，$\operatorname{Coim} f \xrightarrow{\varphi} Y$ を経由する．$g \circ f \circ \alpha = 0$ であることから $\operatorname{Coim} f \to Z$ も一意的に経由するが，これは $g \circ f = 0$ であることから，これは 0-写像でなくてはならない．よって $g \circ \varphi = 0$ である．よって核の普遍性により $\operatorname{Ker} g \to \operatorname{Coim} f \cong \operatorname{Im} f$ を経由することがわかる． ■

Claim 2.13. Abel 圏において，全射かつ単射ならば同型射.

[証明]　$f : X \to Y$ が全射かつ単射とする．まず単射性から，$\operatorname{Coim} f = X$ であり，全射性から $\operatorname{Im} f = Y$ であるから，Abel 圏の定義により，$\operatorname{Coim} f \cong \operatorname{Im} f$ なので f は同型射．■

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r] & 0 \\
& \operatorname{Coim} f = X \cong Y = \operatorname{Im} f \arrow[ur, "\mathrm{id}_Y"'] & &
\end{tikzcd}$$

Claim 2.14.　$X \in \operatorname{Ob} C$ が単射的 [resp. 射影的] であるとは，次の普遍性を満たすことと同値．すなわち，$0 \longrightarrow W \xrightarrow{\alpha} Y$ なる完全列と $f : W \to X$ に対して，$\varphi : Y \to X$ であって $f = \varphi \circ \alpha$ となるものが存在する．
［resp.　完全列 $Y \xrightarrow{\beta} W \longrightarrow 0$ と $g : X \to W$ に対して，$\psi : X \to Y$ であって $\beta \circ \psi = g$ となるものが存在する.］

resp.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\beta"] & W \arrow[r] & 0 \\
& X \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[u, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

[証明]　X が単射的とする．$0 \to W \to Y$ が完全で，$\operatorname{Hom}_C(*, X)$ が完全函手であることから，$\operatorname{Hom}_C(Y, X) \to \operatorname{Hom}_C(W, X) \to 0$ が完全．これは $\operatorname{Hom}_C(Y, X) \to \operatorname{Hom}_C(W, X); \varphi \mapsto \varphi \circ f$ が全射であることを意味する．従って $\alpha : W \to X$ に対して $\varphi \circ f = \alpha$ となる φ が存在する．逆は上の議論を逆にたどればよい．(射影的の場合はすべて矢印を逆にすればよい．) ■

Claim 2.15.　$f : X \to Y$ に対して，

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \operatorname{Ker} f & \to & X & \to & \operatorname{Im} f & \to & 0 \\
0 & \to & \operatorname{Im} f & \to & X & \to & \operatorname{Coker} f & \to & 0
\end{array}$$

はそれぞれ完全．

[証明]
［Step.1］　$\operatorname{Ker} f \to X$ が単射であること．
　実際，$g, g' \in \operatorname{Hom}_C(W, \operatorname{Ker} f)$ が $\alpha \circ g = 0, \alpha \circ g' = 0$ を満たすとすると $\alpha \circ (g - g') = 0$ であることから核の普遍性における経由写像の一意性により $g - g' = 0$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\alpha"] & W \arrow[r] & 0 \\
& X \arrow[ul, "g - g'"] \arrow[u, "0 = \alpha \circ (g - g')"'] &
\end{tikzcd}$$

［Step.2］　$Y \to \operatorname{Coker} f$ が全射であること．
　実際，$g, g' \in \operatorname{Hom}_C(\operatorname{Coker} f, W)$ が $g \circ \gamma = 0, g' \circ \gamma = 0$ を満たすとすると $(g - g') \circ \gamma = 0$

である．余核の普遍性における経由写像の一意性から $g-g'=0$ となる．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] & Y \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "0=(g-g')\circ\gamma"'] & \operatorname{Coker} f \arrow[dl, "g-g'"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

［Step.3］　$\operatorname{Ker} f \to X \to \operatorname{Im} f$ が完全であること．

$$\begin{tikzcd}
& & \operatorname{Coker}\alpha & \\
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "\beta"] & & \operatorname{Im} f \\
\operatorname{Im}\alpha \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr] & & \operatorname{Ker}\beta \arrow[ul, "\zeta"'] \arrow[ll, bend left, dashed] &
\end{tikzcd}$$

Claim 2.16.　$X \in \operatorname{Ob} C$ に対して，$\operatorname{Hom}_C(*, X), \operatorname{Hom}_C(X, *)$ はともに左完全函手.

[証明] $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} W$ が完全列であるとする．このとき，$0 \to \operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(X, Z) \to \operatorname{Hom}(X, W)$ を考える．

まず f が単射であることにより，$\alpha, \alpha' \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ に対して，$f\circ\alpha = f\circ\alpha'$ ならば $\alpha = \alpha'$ が成り立つ．これは，$\operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(X, Z)$ が単射であることを意味する．次に，$\operatorname{Hom}(X, Y) \to \operatorname{Hom}(X, Z) \to \operatorname{Hom}(X, W); \alpha \mapsto f\circ\alpha \mapsto g\circ f\circ\alpha$ であるから，$g\circ f = 0$ よりこれは 0-写像である．

最後に，$\beta \in \operatorname{Hom}(X, Z)$ に対して，$g\circ\beta = 0$ であるとする．このとき，β は核の普遍性により $\operatorname{Ker} g$ を経由する．$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f = \operatorname{Coim} f$ であるが $\operatorname{Coim} f$ は，$g\circ f = 0$ と余核の普遍性により，$\operatorname{Ker} g \to Z$ が Y を経由する．2 つの経由写像を合成することで，$\beta : X \to Z$ は Y を経由することになる．■

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, dashed] \arrow[dr, "\beta"] & & \\
\operatorname{Ker} g \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & Z \arrow[r, "g"] & W \\
& Y \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

3　複体のなす圏

ここでは複体のなす圏とそこからできるホモトピー圏について述べる．

定義 3.1.
(1)　C の複体とは，$\{X^n, d_X^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ であって，

$$X^n \in \operatorname{Ob} C, d_X^n \in \operatorname{Hom}_C(X^n, X^{n+1}), d_X^{n+1}\circ d_X^n = 0$$

をみたすものを言う．
(2)　複体 X から Y への射とは，$\{f^n \in \operatorname{Hom}_C(X^n, Y^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ であって，$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1}\circ d_X^n$

をみたすものを言う．
(3) 複体 X が有界 [resp. 上に有界，下に有界] とは，

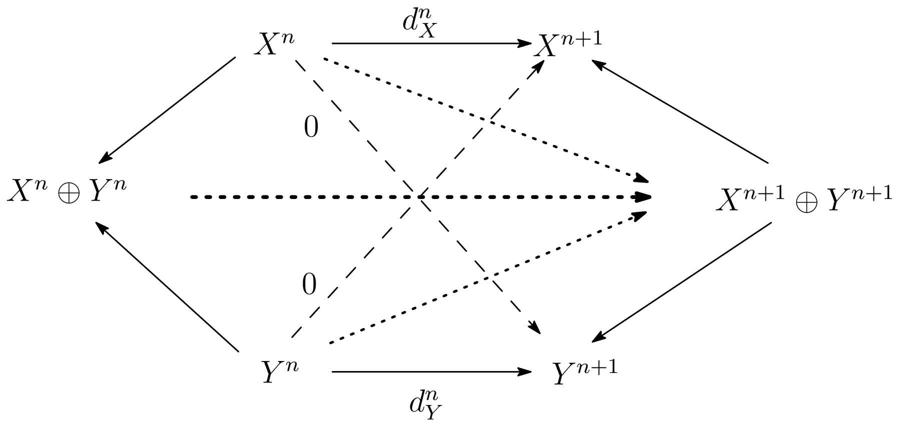
$$X^n = 0\ (|n| >> 0) \quad [\text{resp.} X^n = 0\ (n >> 0), X^n = 0\ (n << 0)]$$

を満たすことを言う．
(4) C の複体とその間の射によってできる圏を $\mathbf{C}(C)$ とかく．また，$\mathbf{C}^b(C), \mathbf{C}^+(C), \mathbf{C}^-(C)$ をそれぞれ有界，上に有界，下に有界な複体のなす充満部分圏とする．

注意 3.2. C 自身も $X = \{X_n = 0 | n \neq 0\}$ とみることで $\mathbf{C}(C)$ の充満部分圏とみなすことができる．

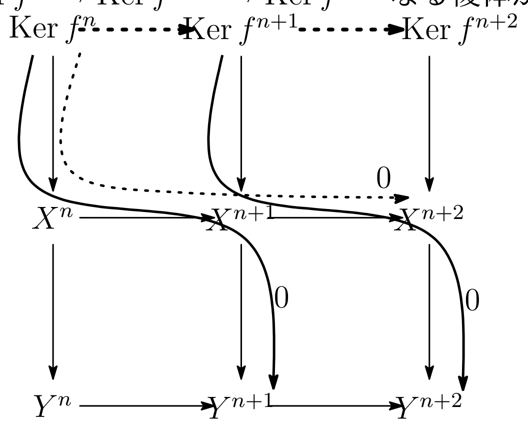
Claim 3.3. C が加法圏 [resp.Abel 圏] であるとき，$\mathbf{C}(C)$ も加法圏 [resp.Abel 圏] となる．

[証明] C が加法圏なら定義の (i),(ii) が成り立つので，$\mathbf{C}(C)$ においても (i),(ii) が成り立つのは明らか．(iii),(iv) をみたす representative は，$\{X^n \oplus Y^n, d_X^n \oplus d_Y^n\}$ で与えられる．



実際，まず $X^n \to Y^{n+1}, Y^n \to X^{n+1}$ をそれぞれ 0-写像とし，$X^{n+1} \oplus Y^{n+1}$ に直積の普遍性を使うことで $X^n \to X^{n+1} \oplus Y^{n+1}, Y^n \to X^{n+1} \oplus Y^{n+1}$ が定まり，次に $X^n \oplus Y^n$ に直和の普遍性を使うことで $X^n \oplus Y^n \to X^{n+1} \oplus Y^{n+1}$ が定まる．これが $d_X^n \oplus d_Y^n$ と複体の間の射の定義を満たすこともわかる．

次に C が Abel 圏であるとする．複体の射 $f : X \to Y$ が与えられたとき，C がアーベル圏であることから各 n ごとに $\mathrm{Ker}\, f^n$ や $\mathrm{Coker}\, f^n$ が定義される．このとき，例えば，$\mathrm{Ker}\, f^n \to \mathrm{Ker}\, f^{n+1} \to \mathrm{Ker}\, f^{n+2}$ なる複体が定まることを言えばよい．



まず $\ker f^{n+1}$, ¥ $Kerf^{n+2}$ の普遍性から写像 $\mathrm{Ker}\, f^n \to \mathrm{Ker}\, f^{n+1}, \mathrm{Ker}\, f^{n+1} \to \mathrm{Ker}\, f^{n+2}$ が定義できる．この合成が 0 になることは，$X^n \to X^{n+1} \to X^{n+2}$ の合成が 0 であるこ

とと $\operatorname{Ker} f^{n+2}$ の普遍性による．

Coker f が定義できることも同様．また $\operatorname{Coim} f = \operatorname{Im} f$ も C がアーベル圏であることから従う． ■

定義 3.4. $k \in \mathbb{Z}, X \in \operatorname{Ob}(\mathbf{C}(C))$ とし，複体 $X[k]$ を

$$X[k]^n = X^{n+k}, d^n_{X[k]} = (-1)^k d^{n+k}_X$$

とすることによって定義し，複体の射 $f : X \to Y$ に対して

$$f[k] : X[k] \to Y[k]; f[k]^n = f^{n+k}$$

と定義する．これによって定義される函手

$$[k] : \mathbf{C}(C) \to \mathbf{C}(C)$$

を次数 k の Shift 函手という．

次にホモトピー圏を導入する．

定義 3.5.
(1) $\mathbf{C}(C)$ の射 $f : X \to Y$ が 0 に homotopic とは，$s^n : X^n \to Y^n - 1$ であって

$$f^n = s^{n+1} \circ d^n_X + d^{n-1}_y \circ s^n$$

を満たすものが存在することを言う．

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^{n+1}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r] & Y^n \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

f が g に homotopic とは $f - g$ が 0 に homotopic であることを言う．
(2) $\operatorname{Ht}(X, Y) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(C)}(X, Y)$ を 0 に homotopic な射のなす部分群とする．このとき C 上の homotopy 圏 $\mathbf{K}(C)$ を

$$\operatorname{Ob}(\mathbf{K}(C)) = \mathbf{C}(C), \operatorname{Hom}_{\mathbf{K}(C)}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(C)}(X, Y)/\operatorname{Ht}(X, Y)$$

によって定義する．$\mathbf{K}^b(C), \mathbf{K}^+(C), \mathbf{K}^-(C)$ も同様に定義する．

Claim 3.6. $\mathbf{K}(C)$ は well-defined に定まる．

[証明] 合成則において

$$\operatorname{Ht}(X, Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(C)}(Y, Z) \to \operatorname{Ht}(X, Z)$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}(C)}(X, Y) \times \operatorname{Ht}(Y, Z) \to \operatorname{Ht}(X, Z)$$

となることを示せばよい．これはすぐに計算できる．

$$\begin{tikzcd}
X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "s^n"'] \arrow[ddl, dotted] & X^{n+1} \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "s^{n+1}"'] \arrow[ddl, dotted] \\
Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Y^n \arrow[r] \arrow[d] & Y^{n+1} \arrow[d] \\
Z^{n-1} \arrow[r] & Z^n \arrow[r] & Z^{n+1}
\end{tikzcd}$$

以下，この節では，C をアーベル圏とする．
コホモロジー群を定義しよう．

定義 3.7. $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}(C))$ に対して，

$$\begin{aligned}
Z^k(X) &:= \mathrm{Ker}\, d_X^k, \\
B^k(X) &:= \mathrm{Im}\, D_X^{k-1}, \\
H^k(X) &:= \mathrm{Coker}(B^k(X) \to Z^k(X)) = \mathrm{Ker}\, d_X^k / \mathrm{Im}\, d_X^{k-1}
\end{aligned}$$

と定義する．この $H^k(X)$ を k 次コホモロジー群という．

Claim 3.8. $H^k(*)$ は $\mathbf{C}(C) \to C$ なる加法的函手を定め，$H^k(X) = H^0(X[k])$ である．

[証明] 後半は明らか．前半を示す．

4 写像錘

C は，ひとまず加法圏とする．ここでは，ホモトピー圏 $\mathbf{K}(C)$ が，次節で定義する「三角圏」となっていることの証明をする．そのための概念としてまず写像錘 (Mapping Cone) と特三角 (distinguished triangle) を導入する．

4.1 行列記法

以下，頻繁に用いる記法として「行列記法」について述べておこう．

S, T を有限添字集合とし，$X = \oplus_{t \in T} X_t, Y = \oplus_{s \in S} Y_s$ とする ($X_t \in \mathrm{Ob}\, C, Y_s \in \mathrm{Ob}\, C$)．このとき，埋め込み $i_t : X_t \to X, i'_s : Y_s \to Y$，射影 $p_t : X \to X_t, p'_s : Y \to Y_s$ を考える．$f : X \to Y$ なる射に対して，

$$f_{st} := p'_s \circ f \circ i_t \in \mathrm{Hom}(X_t, Y_s)$$

と定義することにより，f に対して行列 $(f_{st})_{s \in S, t \in T}$ が定まる．逆に，直積と直和の普遍性から行列 (f_{st}) から f は一意的に定まる．

$$
\begin{tikzcd}
 & X_t \arrow[r, "f_{st}"] \arrow[dl, "i_t"'] \arrow[ddrr, "f_{s't}"' near start] \arrow[drrr, dotted] & & Y_s & \\
X_t \oplus X_{t'} \arrow[rrrr, dotted] & & & & Y_s \oplus Y_{s'} \arrow[ul, "p'_s"'] \arrow[dl, "p'_{s'}"] \\
 & X_{t'} \arrow[r, "f_{s't'}"'] \arrow[ul, "i_{t'}"] \arrow[uurr, "f_{st'}" near start] \arrow[urrr, dotted] & & Y_{s'} &
\end{tikzcd}
$$

射の合成が行列の積に対応していることは明らかである．

4.2　写像錘と特三角

定義 4.1.　$f : X \to Y$ の写像錘 $M(f)$ とは，

$$
M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \quad d^n_{M(f)} = \begin{pmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{pmatrix}
$$

によって定まる複体のことを言う．さらに，写像$\alpha(f) : Y \to M(f), \beta(f) : M(f) \to X[1]$ をそれぞれ

$$
\alpha(f)^n = \begin{pmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{pmatrix}, \quad \beta(f)^n = \begin{pmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}
$$

によって定義する．

次の補題は，$\mathbf{K}(C)$ が「三角圏」であることを示すために用いる．

補題 4.2.　$f : X \to Y$ に対して，$\mathbf{K}(C)$ における isomorphism

$$
\phi : X[1] \to M(\alpha(f))
$$

が存在して，次の図式を可換にする；

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\alpha(f)"] \arrow[d, "id_Y"] & M(f) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "id_{M(f)}"] & X[1] \arrow[r, "-f[1]"] \arrow[d, "\exists\phi"] & Y[1] \arrow[d, "id_{Y[1]}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha(f)"] & M(f) \arrow[r, "\alpha(\alpha(f))"] & M(\alpha(f)) \arrow[r, "\beta(\alpha(f))"] & Y[1]
\end{tikzcd}
$$

[証明]　$\phi : X[1] \to M(\alpha(f)), \psi : M(\alpha(f)) \to X[1]$ を次で構成する；

$$
\phi^n : X[1]^n \to M(\alpha(f))^n : \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ id_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \psi^n : M(\alpha(f))^n \to X[1]^n : \begin{pmatrix} 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}.
$$

このとき，次の (a)〜(e) が成り立つことが示されれば良い．

(a)　$\phi = (\phi^n), \psi = (\psi^n)$ はともに複体の間の射となる．

(b) $\psi \circ \phi = id_{X[1]}$.
(c) $\phi \circ \psi \sim id_{M(\alpha(f))}$.
(d) $\psi \circ (\alpha(\alpha(f))) = \beta(f)$.
(e) $\beta(\alpha(f)) \circ \phi = -f[1]$.

このうちで，(c) 以外はすべて行列の積をそのまま計算すればよい．(c) は

$$s^n : M(\alpha(f))^n \to M(\alpha(f))^{n-1}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，行列の計算により

$$id_{M(\alpha(f))^n} - \phi^n \circ \psi^n = s^{n+1} \circ d^n_{M(\alpha(f))} + d^{n-1}_{M(\alpha(f))} \circ s^n$$

が成り立つことから従う． ■

写像錘を用いて三角図式と特三角を定義しよう．

定義 4.3. $\mathbf{K}(C)$ の三角図式とは，$X \to Y \to Z \to X[1]$ なる複体の列のことを言い，三角図式の間の射とは,

$$\phi : X[1] \to M(\alpha(f))$$

が存在して，次の図式を可換にする；

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "\phi[1]"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1] \end{tikzcd}$$

なる可換図式をみたすものを言う．

次に，$\mathbf{K}(C)$ の三角図式 $X \to Y \to Z \to X[1]$ が特三角であるとは，$f : X' \to Y'$ が存在して，$X' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X'[1]$ に $\mathbf{K}(C)$ で isomorphic であるときを言う．

4.3 ホモトピー圏 $\mathbf{K}(C)$ が「三角圏」であること

定理 4.4. $\mathbf{K}(C)$ において次が成立．

(TR0) 特三角に同型な三角図式は特三角．
(TR1) $X \xrightarrow{id_X} X \to 0 \to X[1]$ は特三角．
(TR2) $\mathbf{K}(C)$ の任意の射 $f : X \to Y$ は特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ と伸ばせる．
(TR3) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ が特三角 $\Leftrightarrow$ $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$ が特三角．
(TR4) 2 つの特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1], X' \xrightarrow{f'} Y' \to Z' \to X'[1]$ に対して，可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

は三角図式の射に伸ばせる；すなわち，

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\exists w"] & X[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
X' \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

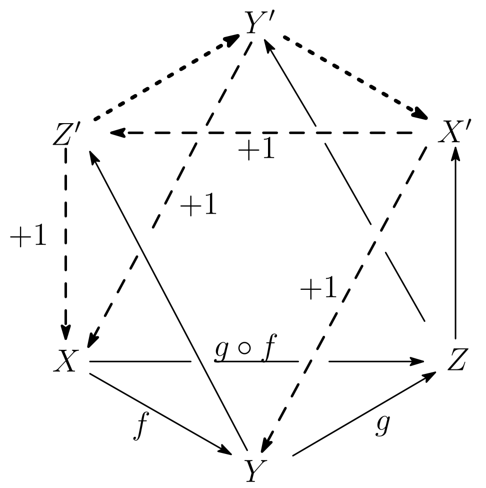
とできる．

(TR5)［八面体公理］ 3 つの三角図式

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to X[1]$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \to X' \to Y[1]$$
$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \to Y' \to X[1]$$

に対して，ある特三角 $Z' \to Y' \to X' \to Z'[1]$ が存在して，次の図式を可換にする；

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_X"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "id_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "g\circ f"'] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id_Z"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "u"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "v"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "id_{X'}"] & Y[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
Z' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & Z'[1]
\end{tikzcd}$$



［証明］ (TR0) は明らか．(TR2) は，定義により $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow M(f) \to X[1]$ が特三角なので明らか．

$0 \to X$ に対して，$M(0) = X$ であることに注意すると，定義により $0 \to X \to X \to 0$ は特三角．従って，(TR3) が示されれば，この特三角をひとつ動かして $X \to X \to 0 \to X[1]$ が特三角となる．従って (TR1) が成立する．以下，(TR3),(TR4),(TR5) をそれぞれ示す．

(TR3) の証明

(⇒) を示す．$X \to Y \to Z \to X[1]$ が特三角との仮定より

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow[f']{} & Y' & \longrightarrow & M(f') & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

なる $\mathfrak{K}(C)$ の同型が存在する．この同型から

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] & \longrightarrow & Y[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & M(f') & \longrightarrow & X'[1] & \longrightarrow & Y'[1] \end{array}$$

なる同型が従う．ここで前の補題を使うと下の複体の列に関して

$$\begin{array}{ccccccc} Y' & \longrightarrow & M(f') & \longrightarrow & X'[1] & \longrightarrow & Y'[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & M(f') & \longrightarrow & M(\alpha(f')) & \longrightarrow & Y'[1] \end{array}$$

なる同型が存在する．この下の複体の列は定義により特三角である．従って $Y \to Z \to X[1] \to Y[1]$ が特三角であることが従う．

(⇐) を示す．$Y \to Z \to X[1] \to Y[1]$ が特三角であるとすると，

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] & \longrightarrow & Y[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{a} & V & \longrightarrow & M(a) & \longrightarrow & U[1] \end{array}$$

なる同型が存在する．そこで下の列を 2 つ移動して

$$U[-2] \xrightarrow{a} V[-2] \longrightarrow M(a)[-2] \longrightarrow U[-1]$$

を考える[6]．このとき，

$$M(a)[-2] = M(a[-2])$$

であることが $M(a)$ と $[-2]$ の定義により直接確かめられる．従ってこの複体の列は

$$U[-2] \xrightarrow{a} V[-2] \longrightarrow M(a[-2]) \longrightarrow U[-1]$$

にほかならず，これは定義により特三角であるから，

$$Y[-2] \longrightarrow Z[-2] \longrightarrow X[-1] \longrightarrow Y[-1]$$

が特三角．(TR3) の (⇒) を繰り返し用いることで

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

[6] 2 つ戻さないと次の主張が符号分ずれて成立しない．

が特三角であることが従う．

(TR4) の証明

(TR0) があるので $Z=M(f), Z'=M(f')$ として一般性を失わない．そこで

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & M(f) & \longrightarrow & X[1] \\
\big\downarrow{\scriptstyle u} & & \big\downarrow{\scriptstyle v} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exists w} & & \big\downarrow{\scriptstyle u[1]} \\
X' & \xrightarrow[f']{} & Y' & \longrightarrow & M(f') & \longrightarrow & X'[1]
\end{array}$$

をみたす w を構成すればよい．まず $\mathbf{K}(C)$ の定義より，与えられた可換図式において

$$v^n \circ f^n - f'^n \circ u^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_{Y'}^{n-1} \circ s^n$$

となる $s^n : X^n \to Y'^{n-1}$ が存在するので，これを用いて

$$w^n := \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix} : M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \to X'^{n+1} \to Y'^n = M(f')$$

を定義する．このとき，次が成り立つ．

(a) $w=(w^n)$ は複体の間の射である．

(b) $w \circ \alpha(f) = \alpha(f') \circ v$.

(c) $u[1] \circ \beta(f) = \beta(f') \circ w$.

証明はいずれも行列の計算である．

(TR5) の証明

(TR4) と同様 $Z'=M(f), X'=M(g), Y'=M(g\circ f)$ としてよい．そこで

$$Z' \xrightarrow[u]{} Y' \xrightarrow[v]{} X' \xrightarrow[w]{} Z'[1]$$

を次で定義する；

$$\begin{aligned}
u^n \quad &: \quad M(f) = X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1} \oplus Z^n = M(g\circ f) : \begin{pmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & g^n \end{pmatrix}, \\
v^n \quad &: \quad M(g\circ f) = X^{n+1} \oplus Z^n \to Y^{n+1} \oplus Z^n = M(g) : \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix}, \\
w^n \quad &:= \quad \alpha(f)[1]^n \circ \beta(g)^n : M(g) = Y^{n+1} \oplus Z^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1} = M(f)[1]; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

このとき，題意の図式の可換性は作り方から明らか．そこで

$$Z' \xrightarrow[u]{} Y' \xrightarrow[v]{} X' \xrightarrow[w]{} Z'[1]$$

が特三角であることを示せばよい．そのために，$M(u)^n = M(f)^{n+1} \oplus M(g\circ f)^n = X\ n+2 \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$ に注意して

$$\begin{aligned}
\phi^n : M(u)^n \to M(g)^n \quad &: \quad \begin{pmatrix} 0 & id_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix}, \\
\psi^n : M(g)^n \to M(u)^n \quad &: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ id_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & id_{Z^n} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

と定義する．このとき，次が成り立つ．

(a) ϕ, ψ は複体の間の射である．

(b) $\phi \circ \alpha(u) = v, \beta(u) \circ \psi = w$.

(c) $\phi \circ \psi = id_{X'}, \psi \circ \phi \sim id_{M(u)}$.

このうち (a),(b) および (c) の前半は行列の計算．(c) の後半は

$$s^n : M(u)^n \to M(u)^{n-1} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を使う． ■

5 三角圏

ここでは三角圏の性質について述べる．

定義 5.1. 加法圏 C とその自己同型 T および C の三角図式の族（この族の元を特三角と呼ぶ）の組が三角圏であるとは，前節の定理において $X[1]$ を $T(X)$ に読み替えて得られる 6 つの公理 (TR0)〜(TR5) を満たすことを言う．

前節の定理は，$\mathbf{K}(C)$ が，自己同型 [1] と特三角によって三角圏となることを示している．

定義 5.2. 2 つの三角圏 $(C, T), (C', T')$ の間の射とは，加法的函手 $F : C \to C'$ であって次の 2 条件を満たすものを言う．

(i) $F \circ T \cong T' \circ F$.

(ii) C の特三角を C' の特三角に移す．

以下，この節ではひとまず C を加法圏，A をアーベル圏とする．

定義 5.3. 加法的函手 $F : C \to A$ がコホモロジー函手であるとは，任意の特三角 $X \to Y \to Z \to T(X)$ に対して，$F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ が完全列となることを言う．

ここで $F^k = F \circ T^k$ とおくと，三角圏の公理 (TR3) とコホモロジー函手の定義によって，任意の特三角 $X \to Y \to Z \to T(X)$ に対し，

$$\cdots \to F^{k-1}(Z) \to F^k(X) \to F^k(Y) \to F^k(Z) \to F^{k+1}(X) \to \cdots$$

なる長完全列ができる．

コホモロジー函手の例は，$\mathrm{Hom}(W, *), \mathrm{Hom}(*, W)$ と $H(*)$ である．

命題 5.4. C を三角圏とする．

(1) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to T(X)$ が特三角ならば $g \circ f = 0$.

(2) 任意の $W \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$\mathrm{Hom}_C(W, *), \mathrm{Hom}_C(*, W)$ はともにコホモロジー函手である．

[証明]　(1)　(TR1) より $X \to X \to 0 \to T(X)$ は特三角．また，可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id_X} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle id_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

に注意すると，(TR4) から特三角の間の射に伸ばせて

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \big\downarrow{\scriptstyle id_X} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exists\phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle id_X[1]} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow[g]{} & Z & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

となる．従って $g \circ f = \phi \circ 0 = 0$.
(2)　$X \to Y \to Z \to T(X)$ が特三角のとき，

$$\mathrm{Hom}_C(W, X) \to \mathrm{Hom}_C(W, Y) \to \mathrm{Hom}_C(W, Z)$$

が完全であることを示す．(1) から $\mathrm{Im} \subset \mathrm{Ker}$ が従うので，$g \circ \phi = 0$ を満たす任意の $\phi \in \mathrm{Hom}_C(W, Y)$ に対して，$f \circ \psi = \phi$ となる $\psi \in \mathrm{Hom}_C(W, X)$ が存在すればよい．

そのために，(TR1) からできる特三角 $W \to Wto0 \to T(W)$ を $(TR3)$ でまわして $W \to 0 \to T(W) \to T(W)$ なる特三角を作り，可換図式

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{0} & 0 \\ \big\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle 0} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Z \end{array}$$

を考え，(TR3) によって得られる特三角 $Y \to Z \to T(X) \to T(Y)$ との間の三角図式の射に (TR4) を用いて伸ばす；

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & T(W) & \longrightarrow & T(W) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle 0} & & \big\downarrow{\scriptstyle \exists} & & \big\downarrow{\scriptstyle T(\phi)} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & Z & \longrightarrow & T(X) & \longrightarrow & T(Y) \end{array}$$

これをひとつ戻すことによって，

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{id_W} & W & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(W) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \exists\psi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle 0} & & \big\downarrow{\scriptstyle T(\psi)} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y & \xrightarrow[g]{} & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

となる ψ が取れて，$f \circ \psi = \phi$ となる．■

命題 5.5.　C がアーベル圏のとき，$H^0(*) : \mathbf{K}(C) \to C$ はコホモロジー函手.

[証明]　$X \xrightarrow{f} Y \to M(f) \to X[1]$ に対して，完全列

$$0 \to Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1] \to 0$$

が存在する．従って H^0 をとることにより完全列

$$H^0(Y) \to H^0(M(f)) \to H^0(X[1]) \to 0$$

が得られるので，H^0 はコホモロジー函手．　■

この節の終わりに，擬同型を定義しておこう．

定義 5.6.　C をアーベル圏とし，$f : X \to Y$ を $\mathbf{K}(C)$ の射とするとき，f が擬同型 (quasi-isomorphism) であるとは，$H^n(f)$ が任意の n で同型であることを言う．擬同型を " qis "と略記することが多い．

Claim 5.7.

$$f \text{ が qis} \Leftrightarrow H^n(M(f)) = 0 \ (\forall n).$$

[証明]　$X \to Y \to M(f) \to X[1]$ なる特三角から，コホモロジー函手 H^0 によってできる長官前列

$$H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(M(f)) \to H^1(X) \to H^1(Y) \to H^1(M(f)) \to \cdots$$

を考える．f が qis なら $H^0(X) \cong H^0(Y), H^1(X) \cong H^1(Y)$ により $H^0(M(f)) = 0$．以下同様に $H^n(M(f)) = 0$．逆にすべての n について $H^n(M(f)) = 0$ なら完全性から $H^n(X) \cong H^n(Y)$，つまり f が qis.　■

6　圏の局所化

ここでは，導来圏の定義に欠かせない圏の局所化について述べる．

6.1　圏の局所化—構成—

まず乗法系 (multiplicateive system) を定義する．

定義 6.1.　C を圏とし，S を C の射の族とする．S が乗法系であるとは，次の (S1)〜(S4) を満たすことを言う；

(S1)　任意の $X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$id_X \in S$.

(S2)　$f, g \in S$ に対して，$g \circ f$ が存在すれば，$g \circ f \in S$.

(S3)　次の形の任意の図式

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g \in S"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対して，$\exists W \in \mathrm{Ob}\, C, \exists h \in S$ であって

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d, "h"] & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

をみたすものが存在する．さらに，上で矢印を逆にした条件も成り立つ．

(S4) $f, g \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ に対して次は同値.

(i) S に属する $t : Y \to Y'$ が存在して，$t \circ f = t \circ g$.

(ii) S に属する $s : X' \to X$ が存在して，$f \circ s = f \circ s$.

次に定義するのは，この乗法系を用いた圏の局所化である．

定義 6.2. C を圏，S を乗法系とする．このとき，S によって C を局所化した圏 C_S とは，次で定義される圏のことを言う；

(i) $\mathrm{Ob}\, C_S = \mathrm{Ob}\, C$.

(ii) $X, Y \in \mathrm{Ob}\, C_S$ に対して，

$$\mathrm{Hom}_{C_S}(X, Y) := \{(X', s, f); X' \in \mathrm{Ob}\, C, S \ni s : X' \to X, f : X' \to Y\}/R$$

ただし，ここで $(X', s, f) \sim_R (X'', t, g)$ とは,

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & X''' \arrow[l, "u"'] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\ & X'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

を満たす $X''' \in \mathrm{Ob}\, C, u \in S$ が存在することとする．

(iii) $(X', s, f) \in \mathrm{Hom}_{C_S}(X, Y), (Y', t, g) \in \mathrm{Hom}_{C_S}(Y, Z)$ に対して，合成則を

$$(X', s, f) \circ (Y', t, g) := (X'', s \circ t', g \circ h)$$

とする．ただしここで $X'', t' \in S, h$ は

$$\begin{tikzcd} & & X'' \arrow[dl, "t'"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd}$$

なるものとする．(実際 (S3) からそのような X'', t', h がとれる．)

Remark 6.3. 上の定義に関しては次の 4 点を証明することが残っている[7].

(a) $\sim_R$ は同値関係である．

[7] この部分について，局所化した圏の射の族が集合となっていることのチェックが抜けているとの指摘を T.O. 氏 (広工大) から頂きました．ご指摘ありがとうございました．なお，集合となるためには，enough injective(or enoughtprojective) プラス α の条件が必要だとのご指摘でしたが，筆者はまだ理解できていません．

(b) 合成則は well-defined である．
(c) 合成則は結合的である．
(d) C_S は圏となる．($id_X \in \mathrm{Hom}_{C_S}(X,Y)$ であって，$f \circ id = f, id \circ g = g$ を満たす.)

6.2 圏の局所化—普遍性—

ここでは圏の局所化の普遍性について述べる．これを見れば，圏の局所化が加群の局所化などのひとつの一般化であることがわかるだろう．

定義 6.4. C を圏，S をその乗法系とし，C_S を C の S による局所化とする．このとき自然な函手 $Q : C \to C_S$ を

$$Q(X) = X \ (X \in \mathrm{Ob}\, C), Q(f) = (X, id_X, f) \ (f \in \mathrm{Hom}_C(X,Y))$$

によって定義する．

次の命題が局所化の普遍性について述べたものである．

命題 6.5. C を圏，S をその乗法系とし，C_S を C の S による局所化，Q を自然な函手とするとき，次が成り立つ．
(1) $s \in S$ に対して $Q(s)$ は C_S で同型射となる．
(2) C_S は次の普遍性を満たすものとして一意的に存在する；すなわち，C' を任意の圏とし，函手 $F : C \to C'$ が S のすべての射を C' の同型射にうつすとき，F は $Q : C \to C_S$ を一意的に経由する．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & C' \\ C_S \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

[証明] (1) (X, id_X, s) が左右の逆射を持つことを示す．まず，

$$(X, id_X, s) \circ (X, s, id_X) = (X, id_X, id_X)$$

であることは明らか．

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl, "id_X"'] \arrow[dr, "id_X"] & & \\ & X \arrow[dl, "id_X"'] \arrow[dr, "s"] & & X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "id_X"] & \\ X & & Y & & X \end{tikzcd}$$

次に，

$$(X, s, id_X) \circ (X, id_X, s) = (X, s, s)$$

であることはすぐにわかる．ところがこれは (Y, id_Y, id_Y) と同値となる．

$$
\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dl, "id_X"'] \arrow[dr, "id_X"] & & \\
& X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "id_X"] & & X \arrow[dl, "id_X"'] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & & X & & Y
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "s"] & \\
Y & & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "s"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"'] & \\
Y & X \arrow[u, "id_X"'] \arrow[l, dashed] \arrow[d, "s"] & Y \\
& Y \arrow[ul, "id_Y"] \arrow[ur, "id_Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

以上により (1) が示された．

(2) 存在の一意性はいつもの議論なので読者に任せる．

$G : C_S \to C'$ を

$$G(X) = X \ (X \in \mathrm{Ob}\, C), \quad G(X', s, f) = F(f)F(s)^{-1} : F(X) \to F(Y) \ (f \in \mathrm{Hom}(X, Y))$$

によって定義する．このとき，$G \circ Q = F$ は明らか．G が well-defined であることを確かめる．

$$
\begin{tikzcd}
& X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & X''' \arrow[u, "v"'] \arrow[l, "u"'] \arrow[d, "w"] & Y \\
& X'' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& F(X') \arrow[dl, "F(s)"'] \arrow[dr, "F(f)"] & \\
F(X) & F(X''') \arrow[u, "F(v)"'] \arrow[l, "F(u)"'] \arrow[d, "F(w)"] & F(Y) \\
& F(X'') \arrow[ul, "F(s')"] \arrow[ur, "F(f')"'] &
\end{tikzcd}
$$

これは

$$F(f) \circ F(s)^{-1} = F(f) \circ F(v) \circ F(u)^{-1} = F(f') \circ F(w) \circ F(u)^{-1} = F(f') \circ F(s')^{-1}$$

となることから従う．G の一意性は作り方から． ■

6.3 充満部分圏の局所化

あとで導来圏の構造を調べる際には，もともとの圏 C ではなく，その充満部分圏として性質の良いものをとってきて，その局所化（導来圏）ともとの導来圏との圏同値をつくる．そのための準備となる内容をここでは述べる．

命題 6.6. C を圏とし，$C' \subset C$ を充満部分圏，S を C の乗法系とする．S' を C' の射の族であって S に含まれるものの全体とし，C' でも乗法系となっていると仮定する．このとき，次の (i) か (ii) のいずれかが成り立っているとき，$C'_{S'}$ は C_S の充満部分圏となる；

(i) $f : X \to Y \in \mathrm{Ob}\, C'$ が S に属すなら，$g : W \to X$ であって $f \circ g \in S$ となるような $W \in \mathrm{Ob}\, C'$ と g が存在する．

(ii) (i) の矢印を逆にしたもの；すなわち，$f : Y \to X$ $(Y \in \mathrm{Ob}\, C')$ が S に属すならば，$g : X \to W \in \mathrm{Ob}\, C'$ かつ $g \circ f \in S$ となるような W と g が存在する．

[証明] $\mathrm{Hom}_{C'_{S'}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_{C_S}(M, N)$ が全単射であることを示す．この写像は，単に左側の射の同値類を右側の射の同値類に移すものである．

単射性．$(L, s, f), (K, t, g)$ が C_S で同値であるとすると，$\exists U \in \mathrm{Ob}\, C_S$ であって $t \circ v = s \circ u \in S$ となる $u : U \to L, v : U \to K$ が存在する；

このとき条件 (i) のもとでは，$S \ni s \circ u : U \to M \in \mathrm{Ob}\, C'$ に対して

$$\mathrm{Ob}\, {C'}_{S'} \ni \exists V \xrightarrow{w} U \xrightarrow{s \circ u} M$$

であって $t \circ v \circ w = s \circ u \circ w \in S$ となるものが存在する．これによって次の可換図式ができるので，両者の射は ${C'}_{S'}$ で同値となる．これで単射性が従う．

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
M & U \arrow[l] \arrow[u, "u"] \arrow[d, "v"] & N \\
& K \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
M & V \arrow[l] \arrow[u, "u \circ w"] \arrow[d, "v \circ w"] & N \\
& K \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

全射性．C_S の射 (L, s, f) に対し，$s : L \to M$ に条件 (i) を用いることで

$$\mathrm{Ob}\, {C'}_{S'} \ni \exists U \xrightarrow{u} L \xrightarrow{s} M$$

かつ $s \circ u \in S$ となる．こうして

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[dl, "s \circ u"'] \arrow[dr, "f \circ u"] & \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

なる ${C'}_{S'}$ の射の像となる．これで全射性が従う． ■

6.4 null system による局所化

導来圏を得る場合にもそうだが，三角圏において乗法系をつくるためのひとつの方法として null system を用いる方法がある．それを述べ，局所化の普遍性，充満部分圏に関する前節の結果を読み替える．

定義 6.7. C を三角圏とし，N を $\mathrm{Ob}\, C$ の部分族とする．このとき，N が null system であるとは，次の 3 条件を満たすことを言う；

(N1) $0 \in N$.

(N2) $x \in N \Leftrightarrow T(X) \in N$.

(N3) $X \to Y \to Z \to T(X)$ が特三角であって $X, Y \in N$ ならば $Z \in N$.

命題 6.8. C を三角圏とし，N を C の null system とする．このとき C の射の族 $S(N)$ を

$$S(N) := \{f : X \to Y | f \text{ は } X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]\ (Z \in N) \text{ なる特三角に伸ばせる }\}$$

で定める．このとき，$S(N)$ は C の乗法系となる．

[証明] (TR1) から $X \xrightarrow{id_X} X \to 0 \to T(X)$ は特三角であり，$0 \in N$ であるから $id_X \in S(N)$．よって (S1) は成立.

(S2) を示す．$f, g \in S(N)$ とすると，それぞれ

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z' \to T(X)$$
$$Y \xrightarrow{g} Z \to X' \to T(Y)$$

と伸ばせる．ただし，$Z', X' \in N$ である．このとき，$g \circ f$ は (TR2) によって

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z \to Y' \to T(X)$$

に伸ばせるが $Y' \in N$ であるかどうかはわからない．しかし，(TR5) から

$$Z' \to Y' \to X' \to T(Z')$$

なる特三角が存在するので，これを $(TR3)$ によってまわすことで

$$X' \to T(Z') \to T(Y') \to T(X')$$

なる特三角を得る．ここで $X' \in N$ であった．(N2) に注意すれば $Z' \in N \Leftrightarrow T(Z') \in N$ である．よって (N3) により $T(Y') \in N$ が従う．再び $(N2)$ により $Y' \in N$．これは $g \circ f \in S(N)$ を意味する．

(S3) を示す．$X \xrightarrow{f} Y \overset{g \in S(N)}{\longleftarrow} Z$ とする．$g \in S(N)$ より

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{k} X' \to T(Z)$$

なる特三角に伸ばせる．($X' \in N$．) そこで $k \circ f : X \to X'$ を (TR2) によって

$$X \xrightarrow{k \circ f} X' \longrightarrow W' \to T(X)$$

に伸ばす．この 2 つの完全列と可換図式

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k \circ f} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle id_{X'}} \\ Y & \xrightarrow[k]{} & X' \end{array}$$

を特三角の間の射に伸ばして

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{k \circ f} & X' & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & T(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle id_{X'}} & & \downarrow{\scriptstyle \exists} & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow[k]{} & X' & \longrightarrow & T(Z) & \longrightarrow & T(Y) \end{array}$$

ができる．これをまわして

$$
\begin{tikzcd}
W'[-1] \arrow[r, "h"] \arrow[d] & X \arrow[r, "k\circ f"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r] \arrow[d] & W' \arrow[d] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r, "k"'] & X' \arrow[r] & T(Z)
\end{tikzcd}
$$

を得る．ここで $X' \in N$ であり，$h \in S(N)$ となる．$W = W'[-1]$ とすれば図式の可換性も上から従う．

(S4) は次が同値であることを示せばよい．

(i’) $S(N) \ni t : Y \to Y'$ かつ $t \circ f = 0$.

(ii’) $S(N) \ni s : X' \to X$ かつ $f \circ s = 0$.

(i’) $\Rightarrow$ (ii’) のみ示す．

$t \in S(N)$ より，

$$Y \xrightarrow{t} Y' \longrightarrow Z \to T(Y)$$

なる特三角に伸ばせる．ここで $Z \in N$．一方，特三角 $X \to X \to 0 \to T(X)$ から (TR3) でまわしてできる特三角 $X \to 0 \to T(X) \to T(X)$ と可換図式

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
Y \arrow[r, "t"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

を (TR4) によって特三角の間の射

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & T(X) \arrow[r] \arrow[d] & T(X) \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "t"'] & Y' \arrow[r] & Z \arrow[r] & T(Y)
\end{tikzcd}
$$

に伸ばして，ひとつまわすことで

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "id_X"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T(X) \arrow[d] \\
Z \arrow[r, "g"'] & Y \arrow[r] & Y' \arrow[r] & T(Z)
\end{tikzcd}
$$

を得る．ここで $f = g \circ h$ となることに注意する．

今度は，h を

$$X \xrightarrow{h} Z \longrightarrow Z' \to T(X)$$

に伸ばし，可換図式

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "t"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

を三角図式の射

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X) \\
{\scriptstyle h}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(Y)
\end{array}$$

に伸ばして，ひとつもどすことで特三角の間の射

$$\begin{array}{ccccccc}
X' & \xrightarrow{s} & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X') \\
\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が得られ，$f \circ s = 0$．$Z \in N$ より $s \in S(N)$ も従う． ■

以下，$C_{S(N)}$ を単に C/N などと略記する．

次は局所化の普遍性を言い換えたものである．

命題 6.9. C を三角圏，N を null system とするとき次が成り立つ．

(1) C/N は C の特三角と同型なものを特三角とすることで再び三角圏となる．

(2) $Q : C \to C/N$ に対して，$X \in N$ なら $Q(X) \cong 0$.

(3) $F : C \to C'$ が $F(X) \cong 0$ $(\forall X \in N)$ を満たすならば，Q を一意的に経由する．

[証明] (1) は明らか．(2) は，$0 \to X \to X \to 0$ なる特三角で $X \in N$ より $0 \in S(N)$ である．よって $Q(0) = 0$ は C/N の同型射となるので，$Q(X) \cong 0$．(3) は明らか． ■

次の命題は充満部分圏に関する結果を読み替えたものである．

命題 6.10. C を三角圏，N を C の null system とする．C' を C の充満三角部分圏とする；すなわち，$X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\, C'$ に対して $X \to Y \to Z \to T(X)$ が C' の特三角ならば C でも特三角であるとする．$N' = N \cap \mathrm{Ob}\, C'$ とおく．このとき次が成り立つ．

(1) N' は C' の null system となる．

(2) 上記の設定に加えてさらに，C の任意の射 $\mathrm{Ob}\, C' \ni Y \to Z \in N$ は，N' の元を経由するとする．このとき C'/N' は C/N の充満部分圏となる．

[証明] (1) (N1),(N2) は明らか．(N3) は $X', Y' \in N', Z' \in \mathrm{Ob}\, C'$ に対して $X' \to Y' \to Z' \to T(X')$ が C' の特三角なら，C の特三角なので $Z' \in N$ が成り立つことから．

(2) 充満部分圏に関する局所化の命題における条件 (i) を確かめればよい．そこで，$f : X \to Y \in \mathrm{Ob}\, C'$ なる $S(N)$ の射に対して，

$$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$$

なる特三角に伸ばす．ここで $Z \in N$ なので，(2) の仮定から $Y \to Z$ は N' の元 Z' を経由する．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr] \arrow[dr, "\exists\phi"'] & & Z \\
& Z' \in N' \arrow[ur, dashed, "\exists\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

そこで ϕ, ψ をそれぞれ特三角に埋め込み，特三角 $X \xrightarrow{f} Y \to Z \to T(X)$ とあわせて (TR5) を用いると

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id"] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & W \arrow[r] \arrow[d] & T(Y) \arrow[d, "id"] \\
Y \arrow[r, "\psi\circ\phi"'] \arrow[d, "\phi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "id"] & T(X) \arrow[r, "-T(f)"] \arrow[d] & T(Y) \arrow[d] \\
Z' \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d, "id"] & T(Z') \arrow[d] \\
W \arrow[r] & T(X) \arrow[r] & U \arrow[r] & T(W)
\end{tikzcd}$$

なる可換図式が成り立つ．右上の可換図式から

$$\begin{tikzcd}
W[-1] \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & Y \\
& X \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

となる $W[-1]$ がとれた．しかも $W \to T(Y) \to T(Z') \to T(W)$ は特三角であり $Z' \in N'$ より $T(Z') \in N'$ となるから $W \to T(Y)$ は $S(N')$ に属することが従う．以上により条件 (i) が成り立つことが確かめられた． ■

7 導来圏

この節では，C をアーベル圏とする．ここでは導来圏を導入し，うまい充満部分圏がとれるときの $\mathbf{D}^+(C)$ の構造を調べる．

7.1 導来圏の定義

null system を用いて $\mathbf{K}(C)$ を局所化することで導来圏を導入する．

Claim 7.1.
(1) $N = \{X \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}(C); H^n(X) = 0\ \forall n\}$ とおく．これは $\mathbf{K}(C)$ の null system.
(2) (1) の N に対して，$S(N)$ は $\mathbf{K}(C)$ の擬同型を含む.

[証明] (1) (N1),(N2) は明らか．(N3) は特三角 $X \to Y \to Z \to X[1]$ からコホモロジー函手 H^0 によってできる完全列

$$H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z) \to H^1(X)$$

を考える．$X, Y \in N$ なら $H^0(X) = H^n(Y) = H^1(X) = 0$ であるから $H^0(Z) = 0$ が従う．あとは同様．よって $Z \in N$.

(2) $f : X \to Y$ が擬同型ならば，$X \xrightarrow{f} Y \to Z \to X[1]$ なる特三角からできる完全列

$$H^n(X) \cong H^n(Y) \to H^n(Z) \to H^{n+1}(X) \cong H^{n+1}(Y)$$

を考えれば $H^n(Z) = 0$ となり，$Z \in N$ が従う．よって $f \in S(N)$．　■

定義 7.2.　$\mathbf{D}(C) = \mathbf{K}(C)/N$ を C の導来圏と呼ぶ．$\mathbf{D}^b(C), \mathbf{D}^+(C), \mathbf{D}^-(C)$ も同様に定義する．

Remark 7.3.　$H^n(*) : \mathbf{K}(C) \to C$ は $X \in N$ のとき $H^n(X) = 0$ であることから，Q を経由するので，これを単に $H^n(*) : \mathbf{D}(C) \to C$ とかく．

命題 7.4.
(1) $\mathbf{D}^b(C)$[resp. $\mathbf{D}^+(C), \mathbf{D}^-(C)$] は

$$H^n(X) = 0 \ (|n| >> 0 \text{ [resp. } n << 0, n >> 0])$$

なる X からなる $\mathbf{D}(C)$ の充満部分圏となる．
(2) $C \to \mathbf{K}(C) \to \mathbf{D}(C)$ によって C 自身を

$$H^n(X) = 0 \ (n \neq 0)$$

なる X からなる $\mathbf{D}(C)$ の充満部分圏となる．

補題 7.5.　C をアーベル圏とし，$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ なる完全列に対し，$M(f)$ を f の写像錘とする．このとき，

$$\phi^n : M(f)^n \to Z^n; (0, g^n)$$

とすると，$\phi = \{\phi^n\} : M(f) \to Z$ は複体の射であって，$g = \phi \circ \alpha(f)$ を満たし，さらに ϕ は擬同型となる．

[証明] ϕ が複体の射であることは行列の計算．後半は，完全列

$$0 \to M(id_X) \xrightarrow{\gamma} M(f) \xrightarrow{\phi} Z \to 0$$

に注意する．ただし，ここで

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & f^n \end{pmatrix}$$

とする．この完全列において $M(id_X) = 0$ であるから $H^n(M(f)) \cong H^n(Z)$ となる．よって ϕ は擬同型となる．　■

この命題により $\mathbf{D}(C)$ においては，完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して三角図式の間の射

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h=\beta(f)\circ\phi^{-1}} & T(X) \\
{\scriptstyle id}\downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow & & {\scriptstyle \phi^{-1}}\downarrow & & {\scriptstyle id}\downarrow \\
X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\beta(f)} & T(X)
\end{array}$$

が同型となる．このことは，導来圏 $\mathbf{D}(C)$ においては，完全列に付随して特三角が得られることを意味している．

7.2 充満部分圏の導来圏

命題 7.6. C をアーベル圏，I を充満加法部分圏とし，条件

(*)　「$\forall X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，$X' \in \mathrm{Ob}(I)$ と完全列 $0 \to X \to X'$ なる完全列が存在する.」

を満たしているとする．このとき次が成立する．
(1) $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(C))$ に対して，$X' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))$ であって $f : X \to X'$ なる擬同型が存在するようなものがとれる．
(2) $N' = N \cap \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))$ とする．このとき

$$\mathbf{K}^+(I)/N' \to \mathbf{D}^+(C)$$

は圏同値を与える．

[証明] (1) から (2) が出ることは次のようにして従う．実際，$\mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I)) \ni Y \xrightarrow{f \in S(N)} X$ とする．このとき (1) のことから $X' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))$ と $g : X \to X'$ なる擬同型がとれる．ところが擬同型 $g \in S(N)$ であることから，合成 $g \circ f \in S(N)$ となる．これによって充満部分圏の局所化の命題における条件 (ii) がみたされるので，$\mathbf{K}^+(I)/N' \to \mathbf{D}^+(C)$ は忠実充満となる．一方，$\forall X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，X と擬同型な $\mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))$ の元 X' がとれるので，圏同値が従う．
(1) を示す． ■

7.3 enough injective と導来圏

C が“ 十分豊富な単射的対象を持つ ”ならば，導来圏の構造はもっとはっきりする．ここではそれを述べる．

定義 7.7. 圏 C が十分豊富な単射的対象を持つ (enough injective) とは，任意の $X \in \mathrm{Ob}\, C$ に対して，ある単射的対象 $X' \in \mathrm{Ob}\, C$ であって，$X \to X'$ が monomorphism となるようなものが存在することを言う．言い換えると，単射的対象のなす充満部分圏が条件 $(*)$ をみたすということに他ならない．

命題 7.8. C を enough injective とし，I を単射的対象からなる充満部分圏とする．このとき，

$$\mathbf{K}^+(I) \to \mathbf{D}^+(C)$$

は圏同値.

[証明] $N \cap \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I)) = 0$ であること示せばよい．そこで $X \in \mathrm{Ob}(K^+(I))$ かつ $H^n(X) = 0$ であるとする．このとき，$Z^n = \mathrm{Ker}(d_X^n)$ とおくと $H^n(X) = 0$ であることから

$$0 \to Z^n \xrightarrow{i^n} X^n \xrightarrow{j^n} Z^{n+1} \to 0$$

が完全．$n << 0$ では $Z^n = 0$ であるから単射的．X^n が単射的であることと n についての帰納法によって，すべての n について Z^n が単射的であることが従う．従って，上記の完全列において

$$k^n \circ i^n = id_{Z^n}, j^n \circ t^n = id_{Z^{n+1}}$$

をみたす $k^n : X^n \to Z^n, t^n : Z^{n+1} \to X^n$ ができる．さらに完全列が分裂することから

$$id_{X^n} = i^n \circ k^n + t^n \circ j^n$$

が成り立っている．ここで

$$s^n = t^{n-1} \circ k^n : X^n \to X^{n+1}$$

とおけば

$$id_{x^n} = d_X^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n$$

が成り立つ．よって $X \cong 0$． ■

8 導来函手

ここでは導来函手を定義し，その存在について調べる．

8.1 導来函手の定義

C, C' をアーベル圏，$F : C \to C'$ を加法的函手，$Q_C : \mathbf{K}^+(C) \to \mathbf{D}^+(C), Q_{C'} : \mathbf{K}^+(C') \to \mathbf{D}^+(C')$ とする．

定義 8.1. 三角圏の射 $T : \mathbf{D}^+(C) \to \mathbf{D}^+(C')$ と函手の間の射 $s : Q_{C'} \circ \mathbf{K}^+(F) \to T \circ Q_C$ の組 (T, s) が F の右導来函手であるとは，次の普遍性を満たすときを言う；すなわち，任意の三角圏の射 $G : \mathbf{D}^+(C) \to \mathbf{D}^+(C')$ に対して，

$$\mathrm{Hom}(T, G) \xrightarrow{s} \mathrm{Hom}(Q_{C'} \circ \mathbf{K}^+(F), G \circ Q_C)$$

が同型を与える．

F の右導来函手を単に RF と書き，$R^n F := H^n \circ RF$ とかいて n 次右導来函手という．

8.2 左完全函手に対する右導来函手の存在

この小節では，F を左完全函手とする．

定義 8.2. $I \subset C$ なる充満部分圏が F-injective であるとは，次の 3 条件を満たすことを言う；

(1) 条件 (*) を満たす.
(2) $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ が完全で，$X', X \in \mathrm{Ob}\, I$ ならば $X'' \in \mathrm{Ob}\, I$ が成り立つ.
(3) $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ が完全かつ $X', X, X'' \in \mathrm{Ob}\, I$ ならば，$0 \to F(X') \to F(X) \to F(X'') \to 0$ が完全列となる.

Claim 8.3. I を F-injective な充満部分圏とすれば，F は $\mathbf{K}^+(I)$ において 0 に擬同型な対象を $\mathbf{K}^+(C')$ の 0 に擬同型な対象に移す.

[証明] $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))$ が 0 と擬同型であるとする．$X : \cdots \to 0 \to X^0 \to X^1 \to \cdots$ とする．このとき，$Z^i = \mathrm{Ker}\, d_X^i$ とおくことで完全列の族

$$0 \to X^0 \to X^1 \to Z^1 \to 0$$
$$0 \to Z^1 \to X^2 \to Z^2 \to 0$$
$$\cdots$$

に分解できる．$X^0, X^1 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))$ と F-injective の定義により，帰納的に $Z^i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))$ となる．再び F-injective の定義から

$$0 \to F(Z_{i-1}) \to F(X^i) \to F(Z^i) \to 0$$

が完全列となる．これは，

$$\cdots \to 0 \to F(X^0) \to F(X^1) \to \cdots$$

が完全であることを意味し，$F(X)$ は 0 に擬同型となる． ■

この claim によって，

$$Q_{C'} \circ \mathbf{K}^+(F) : \mathbf{K}^+(I) \to \mathbf{K}^+(C') \to \mathbf{D}(C')$$

は $\mathbf{K}^+(I)/(N \cap \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))) \cong \mathbf{D}^+(C)$ を経由する；

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^+(I) \arrow[r, "\mathbf{K}^+(F)"] \arrow[d, "Q"'] & \mathbf{K}^+(C') \arrow[r] & \mathbf{D}^+(C') \\
\mathbf{K}^+(I)/(N \cap \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))) \arrow[urr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

このことから次の命題が従う.

命題 8.4. F-injective な充満部分圏 $I \subset C$ が存在すれば，左完全函手 $F : C \to C'$ の右導来函手は

$$\mathbf{K}^+(I)/(N \cap \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(I))) \to \mathbf{D}^+(C')$$

となる.

8.3 右導来函手の存在

定理 8.5. A, B をそれぞれアーベル圏とし，$F : A \to B$ を加法的函手とする．いま，$L \subset \mathbf{K}(A)$ なる充満三角部分圏が存在して，次の 2 条件を満たしていると仮定する；
(i) $\mathbf{K}(A)$ の任意の対象は，ある L の対象と擬同型.

(ii) $I \in \mathrm{Ob}(L)$ が acyclic（すなわち，$H^i(I) = 0\ (\forall i)$）ならば，$F(I)$ も acyclic となる．

このとき，F は右導来函手 (RF, ξ) を持ち，さらに $\forall I \in \mathrm{Ob}(L)$ に対して

$$\xi(I) : Q \circ F(I) \to RF \circ Q(I)$$

は $\mathbf{D}(B)$ の同型写像となる．

[証明] まず F が L の擬同型を $\mathbf{K}(B)$ の擬同型に移すことに注意する．実際，$I_1 \xrightarrow{s:qis} I_2$ に対して，$I_1 \xrightarrow{s} I_2 \longrightarrow J \longrightarrow T(I_1)$ なる特三角をつくる；$J \in N$．すると J は acyclic であり，(ii) の仮定から $F(J)$ も acyclic となるので $F(s)$ は擬同型となる．従って，F は L の擬同型を $\mathbf{K}(B)$ の擬同型に移す.

このことから F は L_{qis} を経由する；すなわち $\overline{F} : L_{\mathrm{qis}} \to \mathbf{D}(B)$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathbf{K}(B) \arrow[d, "Q"] \\ L_{\mathrm{qis}} \arrow[r, "\overline{F}"] & \mathbf{D}(B) \end{tikzcd}$$

いま，$T : L_{\mathrm{qis}} \cong \mathbf{D}(A)$ であることから，$U : \mathbf{D}(A) \to L_{\mathrm{qis}}$ とおき，函手の間の射を

$$\alpha : 1_{L_{\mathrm{qis}}} \to U \circ T, \quad \beta : 1_{\mathbf{D}(A)} \to T \circ U$$

とおく．このとき,

$$\mathbf{R}F := \overline{F} \circ U : \mathbf{D}(A) \to \mathbf{D}(B)$$

と定義し,

$$\xi : Q \circ F \to \mathbf{R}F \circ Q = \overline{F} \circ U \circ Q$$

を以下のようにして定める．まず，圏同値の定義から $X \in \mathbf{K}(A)$ に対して,

$$U \circ Q(X) = Q(I)$$

となる $I \in \mathrm{Ob}\, L$ をとる．すると $\mathbf{D}(A)$ において函手の間の射 β を利用して

$$\beta(Q(X)) : Q(X) \cong T \circ U(Q(X)) = T(Q(I))$$

なる同型ができる．これは $\mathbf{D}(A)$ の三角圏としての射

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ I & & X \end{tikzcd}$$

によって与えられているとしてよい；$s, t \in S(N)$．すると乗法系の公理によって

$$\begin{tikzcd} I \arrow[dr, "s'"'] & & X \arrow[dl, "t'"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

ができる；$s', t' \in S(N)$．ここで (i) の仮定から W は $\mathrm{Ob}\, L$ の元であるとしておいてよい．よって冒頭の注意から $F(s')$ には $\mathbf{D}(B)$ において逆射が存在し，これによって $f(s)^{-1} \circ f(t') : F(X) \to F(W) \to F(I)$ ができる．これを $\xi(X)$ とする；

$$\xi(X) : Q \circ F(X) \to Q \circ F(I) = \overline{F} \circ Q(I) = \overline{F} \circ U \circ Q(X) = \mathbf{R}F \circ Q(X)$$

となる．これが導来函手の普遍性を満たすことは読者の演習．また，もし $X \in \mathrm{Ob}\, L$ であれば $F(t')$ も同型となるので後半は明らか． ■

命題 8.6. C, C', C'' を Abel 圏，$F : C \to C', F' : C' \to C''$ をそれぞれ加法的函手とする．このとき，それぞれに右導来函手 $\mathbf{R}F, \mathbf{R}F'$ が存在するならば，自然な函手の同型

$$\mathbf{R}F' \circ \mathbf{R}F \cong \mathbf{R}(F' \circ F)$$

が成り立つ．

[証明] 実際,

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{R}(F' \circ F), \mathbf{R}F' \circ \mathbf{R}F) = \mathrm{Hom}(Q \circ F' \circ F, \mathbf{R}F' \circ \mathbf{R}F \circ Q)$$

であり,

$$\alpha : Q \circ F \to \mathbf{R}F \circ Q$$
$$\beta : Q \circ F' \to \mathbf{R}F' \circ Q$$

とすれば,

$$Q \circ F' \circ F \xrightarrow{\beta \circ F} \mathbf{R}F' \circ Q \circ F \xrightarrow{\mathbf{R}F' \circ \alpha} \mathbf{R}F' \circ \mathbf{R}F \circ Q$$

となる． ■

A Example

本文では，ほとんど全くといっていいほど，example を述べませんでした．ここでは，本文に関連する example をいくつか紹介します．そのうちいくつかは，いずれ本文の中に埋め込まれるかもしれません．

A.1 Hom と ⊗

A.1.1 Hom と Ext

定義 A.1. A をアーベル圏，$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}(A))$ とし，i 次 hyperext を

$$\mathrm{Ext}^i(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(X, T^i(Y))$$

と定義する．

命題 A.2. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ を複体の完全列とするとき，$V^{\cdot} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{K}(A)$ に対して，2 つの長完全列

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i(V, X) \to \mathrm{Ext}^i(V, Y) \to \mathrm{Ext}^i(V, Z) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(V, X) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i(X, V) \to \mathrm{Ext}^i(Y, V) \to \mathrm{Ext}^i(Z, V) \to \mathrm{Ext}^{i+1}(X, V) \to \cdots$$

が得られる．

[証明] 短完全列から特三角 $X \to Y \to M(f) \to T(X)$ ができ，$M(f) \overset{\mathrm{qis}}{\cong} Z$ であった．この特三角と Hom がコホモロジー函手であることとを用いれば，もとめる完全列を得る． ■

定義 A.3. $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}(A))$ とするとき，複体 $\mathrm{Hom}^{\cdot}(X, Y)$ を

$$\mathrm{Hom}^n(X, Y) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(X^p, Y^{p+n})$$

と，$f = \{f^p\}_{p \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}^n(X, Y)$ に対して，

$$d^n f = \{(-1)^{n+1} d_Y^{p+n} \circ f^p + f^{p+1} \circ d_X^p\}_{p \in \mathbb{Z}}$$

と定義する．

命題 A.4.

$$H^n(\mathrm{Hom}^{\cdot}(X, Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(X, T^n(Y)).$$

[証明] d^n の定義から

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, d^{n-1} &= \{0 \text{ に homotopic な複体の射}\}, \\ \mathrm{Ker}\, d^n &= \{X \to T^n(Y) \text{ なる複体の射}\} \end{aligned}$$

であることからわかる． ■

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & X^{p-1} \arrow[r, "d_X^{p-1}"] \arrow[d, "f^{p-1}"] & X^p \arrow[r, "d_X^p"] \arrow[d, "f^p"] \arrow[dr, "(-1)^{n+1} d_Y^{p+n} \circ f^p + f^{p+1} \circ d_X^p"] & X^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{p+1}"] & {} \\
{} \arrow[r] & Y^{p+n-1} \arrow[r, "d_Y^{p+n-1}"'] & Y^{p+n} \arrow[r, "d_Y^{p+n}"'] & Y^{p+n+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

また，$\mathrm{Hom}^{\cdot}$ は

$$\mathrm{Hom}^{\cdot} : \mathbf{K}(A)^{\circ} \times \mathbf{K}(A) \to \mathbf{K}(\mathbf{Ab})$$

なる bifunctor である．

補題 A.5. A を abel 圏とし，$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}(A))$ であり，$Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(A))$ を単射的対象とする．このとき，次のいずれかが成り立てば，$\mathrm{Hom}^{\cdot}(X, Y)$ は acyclic である；

(i) X が acyclic.

(ii) Y が acyclic.

さて，A を abel 圏とし，$L \subset \mathbf{K}^+(A)$ を単射的対象からなる複体のなす充満部分圏とする．すると，右導来函手の存在定理の仮定をみたすため，

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}(X,*) : \mathbf{K}^+(A) \to \mathbf{K}(\mathbf{Ab})$$

は右導来函手

$$\mathbf{R}_{II}\,\mathrm{Hom}^{\cdot} : \mathbf{K}(A) \times \mathbf{D}^+(A) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

を持つ．これは第 1 成分に関して exact だから，左完全函手に関する右導来函手の存在定理から

$$\mathbf{R}_I\mathbf{R}_{II}\,\mathrm{Hom}^{\cdot} : \mathbf{D}(A)^{\circ} \times \mathbf{D}^+(A) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

を持つ．これを単に $\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}^{\cdot}$ とかくことにする．

Remark A.6. A がもし enough projective であれば，

$$\mathbf{R}_{II}\mathbf{R}_I\,\mathrm{Hom}^{\cdot} : \mathbf{D}^-(A)^{\circ} \times \mathbf{D}(A) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

が定義される．従って，もし A が enough injective かつ enough projective なら $\mathbf{D}^-(A)^{\circ} \times \mathbf{D}^+(A)$ 上で $\mathbf{R}_I\mathbf{R}_{II}\,\mathrm{Hom}^{\cdot}$ と $\mathbf{R}_{II}\mathbf{R}_I\,\mathrm{Hom}^{\cdot}$ とが定義されることになるが，これらは自然に同型となることが導来函手の定義/普遍性によりわかる．

定理 A.7. A を enough injective なアーベル圏とする．このとき，$X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}(A)), Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(A))$ に対して，

$$\mathbf{R}^i\,\mathrm{Hom}^{\cdot}(X,Y) = H^i(\mathbf{R}^+\,\mathrm{Hom}^{\cdot}(X,Y)) = \mathrm{Ext}^i(X,Y)$$

が成り立つ．

[証明] Y と擬同型な単射的対象 I をとることで

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}\,i(X,Y) &= \mathrm{Ext}^i(X,I) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(A)}(X,I) \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(X,I) \\
&= H^i(\mathrm{Hom}^{\cdot}(X,I)) \\
&= H^i(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}^{\cdot}(X,Y))
\end{aligned}$$

となる． ■

A.1.2 $\otimes$ と Tor

R を可換環とする．まず，P,Q をそれぞれ右，左 R-加群の複体とするとき，

$$P \otimes_R Q = \{P_i \otimes_R Q_j\}$$

とし，

$$d \otimes 1 : P_i \otimes Q_j \to P_{i-1} \otimes Q_j$$
$$(-1)^i \otimes d : P_i \otimes Q_j \to P_i \otimes Q_{j-1}$$

とする．この二重複体からできる simple complex を $\mathrm{Tot}^{\oplus}(P \otimes_R Q)$ とかく．このとき，右 R-加群 A に対して，函手

$$F : \mathbf{K}(R-\mathbf{Mod}) \to \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) : F(B) = \mathrm{Tot}^{\oplus}(A \otimes_R B)$$

が定義できる．いま左 R-加群の圏が enough projective であることに注意すると，左随伴函手

$$\mathbf{L}F : \mathbf{D}^{-}(R-\mathbf{Mod}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

が定まる．

A.2　連接層の導来圏

A.2.1　層の圏と準備

$(X, \mathcal{O}_X)$ を prescheme とする．

定義 A.8.　X 上の $\mathcal{O}_X$-加群の層からなる圏を $\mathrm{Mod}(X)$ とかく．これはアーベル圏となり，これからできる導来圏を簡単に $\mathbf{D}(X)$ とかく．

$\mathrm{Mod}(X)$ の thick な充満部分圏として準連接層，連接層のなす圏をそれぞれ $\mathrm{Qco}(X), \mathrm{Coh}(X)$ とかく．これもやはりアーベル圏となり，これからできる導来圏を $\mathbf{D}_{qc}(X), \mathbf{D}_c(X)$ とかく．

次のことが良く知られている．

定理 A.9.
(1)　$\mathrm{Mod}(X), \mathrm{Qco}(X)$ は enough injective である．
(2)　任意の $\mathcal{O}_X$-加群の層は平坦 $\mathcal{O}_X$-加群の層の quatient となる．

A.2.2　層の演算・層のコホモロジーと導来函手

層の順像と逆像の定義をしよう．

定義 A.10.　$f : X \to Y$ を位相空間の連続写像とする．
(1)　X 上の層 F に対して，F の順像 f_*F なる Y 上の層を

$$(f_*F)(V) := F(f^{-1}(V)) \ (V \text{ は } Y \text{ の任意の開集合})$$

によって定義する．
(2)　Y 上の層 G に対して，G の逆像 $f^{-1}F$ なる X 上の層を

$$(f^{-1}G)(U) := \varinjlim G(V) \text{（ただし}, V \text{ は } F(U) \text{ を含むすべての開集合 } V \text{ を動く）}$$

によってできる X 上の前層の層化として定義する．

補題 A.11. f^{-1} は右完全函手，f_* は左完全函手であって，互いに他の随伴函手である．

Mod(X) が enough injective であることは，次に定義する柔軟層を用いて，柔軟分解 (flabby resolution) ができることに含まれる．

定義 A.12. 代数多様体 X 上の $\mathcal{O}_X$-加群の層 I が柔軟であるとは，任意の開集合 $V \subset U$ に対して，

$$\rho_V^U : \Gamma(U, I) \to \Gamma(V, I)$$

が全射となることを言う[8]．

Claim A.13. 任意の $K \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Mod}(X)$ に対して，柔軟 $\mathcal{O}_X$-加群の層からなる複体 I であって，擬同型 $K \cong I$ となるものが存在する（flabby resolution）．

このことから，層の順像 f_* から誘導される複体の射 $f_* : \mathbf{K}(\mathrm{Mod}(X)) \to \mathbf{K}(\mathrm{Mod}(Y))$ の導来函手が存在する．これを $\mathbf{R}f_*$ とかく．すると，L として柔軟 $\mathcal{O}_X$-加群の層のなす複体を考えることで，

$$\mathbf{R}f_*(K) = f_*(I)$$

が $\mathbf{D}^+(\mathrm{Mod}(X))$ において成立する．さらに

$$\mathbf{R}^i f_*(K) = H^i(f_* I) = H^i(f_* K)$$

となる．

なお，Y として 1 点集合をとれば，f_* は global section を取る函手 Γ に他ならないので，これにも右導来函手 $\mathbf{R}\Gamma$ が存在することもわかる．

Remark A.14. 上記では $\mathbf{D}^+$ 上の函手として $\mathbb{R}f_*$ が存在することを示したが，これが $\mathbf{D}_{qco}, \mathbf{D}_{coh}$ 上の函手となるかどうかについては，いくつかの条件が必要になる．詳細は [HaRD] を参照のこと．たとえば，次のようなことがいえる．

定理 A.15 (HaRD2.1,2.2). (1) $f : X \to Y$ が固有かつ準コンパクトであれば，$\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^+_{qc}(X) \to \mathbf{D}^+_{qc}(Y)$ が存在し，さらに X が Krull 次元有限な Noetherian prescheme であれば，$\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}_{qc} \to \mathbf{D}_{qc}$ となる．
(2) $f : X \to Y$ が固有かつ Y が局所 Noetherian prescheme ならば，$\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}^+_{coh}(X) \to \mathbf{D}^+_{coh}(Y)$ が存在し，さらに X が Krull 次元有限な Noetherian prescheme であれば，$\mathbf{R}f_* : \mathbf{D}_{coh}(X) \to \mathbf{D}_{coh}(Y)$ となる．

A.2.3 Fourier-Mukai 変換

X を Abel 多様体，$\hat{X}$ を dual abel 多様体（すなわち $\mathrm{Pic}^0(X)$=X 上の line bundle の moduli）とする．このとき，次の圏同値が成り立つ；

$$\mathbf{D}_{coh}(X) \cong \mathbf{D}_{coh}(\hat{X}).$$

[8]任意の開集合 U に対して，ρ_U^X が全射となるとき，散布的層 (flasque) と言う．これは柔軟と同値．柔軟ならば散布的は $V = X$ とすればよい．逆に散布的ならば柔軟であることは，$\rho_U^X = \rho_U^V \rho_V^X$ に注意すればよい．

この圏同値を与える函手を Fourier-Mukai 変換といい，X 上の universal Poincaré line bundle を用いて定義される．

一般に $\mathbf{D}_{coh}(X) \cong \mathbf{D}_{coh}(Y)$ から $X \cong Y$ がいえるかどうかについては，Fano 多様体に関しては正しいが，Symplectic 多様体などには反例があるとのこと．

A.3　構成可能層の導来圏と偏屈層—Riemann-Hilbert 対応—

Riemann-Hilbert 対応とは，線形常微分方程式に付随して得られる基本群の有限次元表現に関する逆問題で，与えられた基本群の有限次元表現に対応するモノドロミーを持つ線形常微分方程式を構成できるかどうかを問う問題である（Hilbert の第 21 問題）．これは 1984 年頃に柏原と Mebkhout により解決された．それについて述べるには，構成可能層や偏屈層の言葉が必要になる．（当然 D-加群の言葉も必要．）当然のことばがら，ここではそれらをすべて述べることなどできるはずもないので，詳細は [TH] を見てほしい．ここでこの例を取り上げるのは，いわば導来圏の言葉を用いて初めて定式化できることの一例という程度意味である．

A.3.1　構成可能層

定義 A.16.　analytic space（not posiibly smooth）X 上の層 F が構成可能 (constractible) であるとは，ある分割 $X = \sqcup_{i=1}^{r} X_i$ (X_iは局所閉部分多様体) が存在して，$F|_{X_i}$ が階数有限の局所定数層となることを言う．

例 A.17.　$X = \mathbb{C}$ とする．
(1)　X 上の定数層 $\mathbb{C}_X$ は構成可能層．
(2)　X 上の層 $\mathbb{C}\sqrt{z}$ は構成可能層．（$X = X \backslash \{0\} \sqcup \{0\}$ とすれば，$\{0\}$ 以外での分岐は 2.）

A.3.2　Riemann-Hilbert 対応（その１）

定理 A.18.　［Riemann-Hilbert 対応 (I)］　X を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体（あるいは複素多様体）とするとき，

$$D^b(\mathrm{Mod}(D_X)) \cong D^b_c(X)$$

なる圏同値が成り立つ．ここで $\mathrm{Mod}(D_X)$ とは，X 上の D_X-加群の層のなす圏．$D^b_c(X)$ とは，X 上の構成可能層の有界複体のなす導来圏[9]である．

A.4　位相幾何学に見られるアナロジー

位相幾何学におけるアナロジーとしてここで意図しているのは，stable homotopy category と呼ばれているものである．筆者には幾何的な予備知識がないので，述べるのは無理そうである．[We](§10.9) を参照のこと．

[9]これは，有限個の除いて $H^i(X,F) = 0$ かつ各 $H^i(X,F)$ なるコホモロジー層が構成可能層となるような X 上の $\mathbb{C}_X$-加群の層のなす導来圏に一致するらしい．

参考文献

[KS] ”Sheaves on Manifolds”（M.Kashiwara,Schapira）

[GM] ”Methods of Homological Algebra”（Gelfand,Manin）

[HaRD] ”Residues and Duality”（R.Hartshorne;LNM20）

[We] ”An Introduction to Homological Algebrs”（C.A.Weibel:Cambridge studies in advanced mathmatics 38）

[Iva] 『層のコホモロジー』（イヴァセン:前田訳）

[Ka] 『コホモロジーのこころ』（加藤五郎:岩波書店）

[TH] 『D 加群と代数群』（谷崎俊之・堀田良之：シュプリンガーフェアラーク東京）

[Kaw] 『ホモロジー代数』（河田敬義：岩波講座基礎数学）